Feladatok:

1.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a harmadik hatos dobás vagy a huszadik vagy valamely későbbi dobásban jelenik meg.

Első megoldás. Annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás az n-ik dobásban jelenik meg $\binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3$. Ezért a tekintett esemény a valószínűsége

$$\sum_{n=20}^{\infty}\binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

Második megoldás. Először megmutatom, hogy annak a valószínűsége, hogy a harmadik hatos dobás a 20. dobásban vagy azután jelenik meg egyenlő annak a valószínűségével, hogy a az első tizenkilenc dobásban 0, 1 vagy két hatos dobás történt. Valóban, a keresett esemény komplementere az az esemény, hogy a harmadik hatos dobás vagy az első tizenkilenc dobás valamelyikében vagy soha nem következett be. De mivel az utóbbi esemény valószínűsége nulla (1 valószínűséggel végtelen sok hatos dobás van egy szabályos dobókocka végtelen dobássorozatban), és egy esemény bekövetkezésének a valószínűsége egyenlő 1 minusz a komplementer esemény valószínűségével. Ezért a keresett valószínűség egyenlő 1 minusz annak a valószínűsége, hogy az első 19 dobásban legalább három hatos dobás történt. Ez viszont egyenlő annak a valószínűségével, hogy az első 19 dobásban 0, 1 vagy két hatos dobás történt. Ezért a keresett valószínűség

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{19}+\binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18}\frac{1}{6}+\binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}.$$

2.) Az előző feladat két megoldásában ugyanannak az eseménynek a valószínűségére két formálisan különböző kifejezést kaptunk. Mutassuk meg közvetlenül (valószínűségi meggondolások nélkül), hogy a két kifejezés egyenlő. Adjunk az analízis módszereit alkalmazó bizonyítást arra a bizonyításban felhasznált eredményre is, hogy egy szabályos dobókocka 1 valószínűséggel tartalmaz legalább három 6-os dobást.

Megoldás. Először az 1. feladat első megoldásában szereplő végtelen összeget számolom ki az $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$, ha $|x|<1$ azonosság segítségével, ahol $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α (tehát nem feltétlenül pozitív egész) számra is érvényes, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Vegyük észre, hogy

$$\binom{n-1}{2}=\binom{n-1}{n-3}=(-1)^{n-1}\frac{(-3)(-4)\cdots(1-n)}{(n-3)!}=(-1)^{n-1}\binom{-3}{n-3},$$

ahonnan $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\binom{n-1}{2}x^{n-3}=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\binom{-3}{n-3}(-x)^{n-3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-x)^n=(1-x)^{-3}$ minden $|x|<1$ számra. Speciálisan, $x=\frac{5}{6}$ választással $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3=1$. Ez az azonosság ekvivalens azzal az állítással, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása esetén 1 valószínűséggel legalább 3 hatos dobás megjelenik.

Hasonló számolással bebizonyítom az

$$\begin{aligned}&\binom{19}{0}x^{19}(1-x)^{-3}+\binom{19}{1}x^{18}(1-x)^{-2}+\binom{19}{2}x^{17}(1-x)^{-1}\\&=\sum_{n=17}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n=\sum_{n=20}^{\infty}\binom{n-1}{2}x^{n-3}\end{aligned}$$

azonosságot. Ez utóbbi azonosság mind a két oldalát megszorozva $(1-x)^3$-nel, és az így kapott azonosságba behelyettesítve az $x=\frac{5}{6}$ értéket megkapjuk, hogy az 1. feladatban szereplő valószínűségre adott két kifejezés egyenlő.

A bizonyítandó azonosság baloldalán szereplő kifejezést Taylor sorba fejthetjük a következő azonosságok segítségével: $(1-x)^{-3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$, $(1-x)^{-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-1)^nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n$, és $(1-x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n}{0}x^n$. Ezen azonosságok segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&x^{19}(1-x)^{-3}+\binom{19}{1}x^{18}(1-x)^{-2}+\binom{19}{2}x^{17}(1-x)^{-1}\\&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}\binom{19}{0}x^{n+19}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}\binom{19}{1}x^{n+18}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{0}\binom{19}{2}x^{n+17}.\end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben a megfelelő tagokat összevonva egy olyan hatványsort kapunk, amelyben x^n együtthatója $\binom{n-17}{2}\binom{19}{0}+\binom{n-17}{1}\binom{19}{1}+\binom{n-17}{0}\binom{19}{2}$ minden $n\geq 17$ kitevőre, és az $n<17$ kitevőkre az x^n tag együtthatója nulla. Viszont tudjuk, hogy $\binom{n-17}{2}\binom{19}{0}+\binom{n-17}{1}\binom{19}{1}+\binom{n-17}{0}\binom{19}{2}x^{n+17}=\binom{(n-17)+19}{2}=\binom{n+2}{2}$. (Ezt az azonosságot, illetve ennek általánosítását be fogjuk bizonyítani a következő 3. feladatban.) Innen következik a bizonyítandó azonosság.

Az első feladat két megoldásának összehasonlításával olyan azonosságokat bizonyítottunk viszonylag egyszerű valószínűségszámítási meggondolások segítségével, amelyeknek analitikus bizonyítása sok munkát igényel. Érdemes megjegyezni, hogy valójában a valószínűségszámítási meggondolások hátterében is mély és nehezen bizonyítható eredmények rejtőznek. Érveléseinkben kihasználtuk, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymást követő független feldobásának van valószínűségi modellje, és ebben a modellben a valószínűségi mérték σ-additív. Az előző példák azt mutatták, hogy a valószínűség σ-additivitásának nem-triviális következményei vannak.

3.) Minden nem negatív egész n, m és k számokra igaz az

$$\binom{n+m}{k}=\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

azonosság. (Tegyük fel, hogy $n + m \geq k$.)

Megoldás: A következő kombinatórikai meggondolás megadja a bizonyítást. Számoljuk ki két különböző módon, hogy egy urnából, amelyben $n + m$ (megkülönböztethető) golyó van, hányféleképp választhatunk ki k golyót. Ez egyrészt $\binom{n+m}{k}$, ami a baloldali kifejezéssel egyenlő. Másrészt, fessünk n golyót piros és m golyót fehér színűre. Ekkor $\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$ féle módon választhatunk ki k golyót úgy, hogy ezek közül s piros és $k - s$ fehér. Ezeket a mennyiségeket összegezve minden $0 \leq s \leq k$ számra egyrészt megkapjuk az azonosság jobboldalán szereplő kifejezést, másrészt a baloldalon szereplő kifejezést számoltuk ki más módon.

Az első feladat vizsgálatában tulajdonképpen azt használtuk ki, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok dobásának létezik valószínűségi modellje. Egy ilyen valószínűségi modellt megkaphatunk például a következő módon. Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt. Egy ω elemi esemény egy végtelen $\omega = (j_1, j_2, \dots)$ sorozat, ahol $1 \leq j_s \leq 6$ minden $1 \leq s < \infty$ indexre, és az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból áll. Definiálnunk kell még a $\mathcal{A}$ σ-algebrát és P valószínűségi mértéket is, és ezeket az alább definiált a C_n hengerhalmazok, $n = 1, 2, \dots$ hengerhalmazok segítségével fogjuk megtenni. A hengerhalmazok definiciójának érdekében vezessük be először minden $n = 1, 2, \dots$ számra az összes n hosszúságú $1, 2, \dots, 6$ elemeket tartalmazó Ω_n halmazt, és az Ω_n halmaz összes $\tilde{C}_n \subset \Omega_n$ részhalmazából álló $\mathcal{C}_n$ halmazrendszert. Azt mondjuk, hogy egy $C_n \subset \Omega$ halmaz hengerhalmaz $\tilde{C}_n \in \mathcal{C}_n$ alappal, ha $\omega = (j_1, j_2, \dots) \in C_n$ akkor és csak akkor ha az ω sorozat $\omega_n = (j_1, \dots, j_n)$ megszorítása az első n tagra eleme a $\tilde{C}_n$ halmaznak. Az összes ilyen módon előállítható halmazt (tetszőleges $n = 1, 2, \dots$ index-szel) nevezzük hengerhalmaznak.

Nem nehéz belátni, hogy a hengerhalmazok algebrát alkotnak. Az általuk generált legszűkebb σ-algebra az $\mathcal{A}_n$ σ-algebra. Ha C_n halmazalgebra $\tilde{C}_n$ alappal, akkor $P(C_n) = (\frac{1}{6})^n |\tilde{C}_n|$, ahol $|\tilde{C}_n|$ a $\tilde{C}_n$ halmaz elemszámát jelöli. Be kell látni, hogy ilyen módon valóban mértéket definiáltunk a hengerhalmazok algebráján, amely egyértelműen kiterjeszthető egy a $\mathcal{A}$ σ-algebrán definiált mértékké. Az első állítás, (tulajdonképpen annak áltlalánosítása) következik a Kolmogorov-féle alaptételből. A második állítás a mértékelméletben bizonyított Carathéodory-féle kiterjesztési tételből következik. Az első feladat megoldásában, illetve a két megoldás összehasonlításából következő azonosság bizonyításában ezeket a tényeket használtuk fel.

4.) Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága α-nál kisebb ($1 \leq \alpha < \sqrt{2}$)?

Megoldás: Jelölje ξ a négyzet egyik, η a négyzet átellenes oldalára ledobott pont értékét. A két ledobott pont távolsága (a Pitagorasz-tétel szerint) $\sqrt{(\xi - \eta)^2 + 1}$, ezért minket a $P(\sqrt{(\xi - \eta)^2 + 1} < \alpha) = P(|\xi - \eta| < \sqrt{\alpha^2 - 1})$ valószínűség értéke érdekel. ξ és η két független a $[0, 1$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A feladatot egyrészt megoldhatjuk a geometriai valószínűségek módszerével. Ekkor azt használjuk, ki, hogy a (ξ, η) véletlen vektor az egységnégyzet egy véletlen pontja, és a keresett valószínűség az $\{(u, v)\colon\ 0 \leq u, v \leq 1,\ -\sqrt{\alpha^2 - 1} <$

$u-v<\sqrt{\alpha^2-1}\}$ halmaz területe, ami $1-(1-\sqrt{\alpha^2-1})^2=2\sqrt{\alpha^2-1}-(\alpha^2-1)$. Másrészt a minket érdeklő valószínűséget kiszámolhatjuk a konvolucióról tanultak alapján is. Ennek segítségével ugyanis ki tudjuk számolni a $\xi-\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét, ami $g(x)=|1-x|$, ha $|x|\le 1$, és $g(x)=0$. ha $|x|>1$. Innen tetszőleges $0\le u\le 1$ számra $P(|\xi-\eta|<u)=\int_{-u}^{u}g(x)\,dx=2\int_0^u(1-x)\,dx=2u-u^2$ Innen $u=\sqrt{\alpha^2-1}$ választással a keresett valószínűség $2\alpha-\alpha^2=2\sqrt{\alpha^2-1}-(\alpha^2-1)$.

5.) A $[0,1]$ intervallumon találomra felveszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két felvett pont távolsága kisebb, mint a 0 pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

Megoldás: Ezt a feladatot legegyszerűbben a geometriai valószínűségek módszerével tudjuk megoldani. Egyszerűbb először a feladatban kérdezett esemény komplementerének a valószínűségét kiszámolni. Legyen ξ az első, η a második ledobott pont értéke, és vezessük be az $A=\{\omega\colon\ \xi(\omega)>2\eta(\omega)\}$ és $B=\{\omega\colon\ \eta(\omega)>2\xi(\omega)\}$ eseményeket. Ekkor a minket érdeklő esemény komplementere az $A\cup B$ esemény. Továbbá, az A és B események diszjunktak, $P(A)=P(B)$, ezért $P(A\cup B)=2P(A)$. A (ξ,η) véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, és az A esemény azt jelenti, hogy ez a pont az $\{(u,v)\colon\ 0<2v<u\le 1\}$ halmazba esik. Ennek valószínűsége $\frac14$. Ezért $P(A\cup B)=\frac12$, és a keresett valószínűség $1-\frac12=\frac12$.

Megjegyzem, hogy az előbb tekintett $P(A)$ eseményt a következőképp számolhatjuk ki általános elvek segítségével. A (ξ,η) véletlen vektor sűrűségfüggvényét ismerjük. Ez a ξ és η valószínűségi változók függetlensége miatt $g(u,v)=f(u)f(v)$, ahol $f(u)=1$, ha $0\le u\le 1$, $f(u)=0$, ha $u<0$ vagy $u>1$ a ξ és η valószínűségi változók sűrűségfüggvénye. Innen,

$$\begin{aligned}P(A)&=\int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}}g(x,y)\,dx\,dy=\int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}}f(x)f(y)\,dx\,dy\\&=\int_{\{(x,y)\colon\ 1\ge x>2y>0\}}dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{x/2}dy\right)dx=\int_0^1\frac{x}{2}\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac14.\end{aligned}$$

6.) Legyen adva egy $\xi(\omega)$ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye. Határozzuk meg ennek segítségével az $\{\omega\colon\ a<\xi(\omega)<b\}$ alakú események, $-\infty<a<b<\infty$, valószínűségét, valamint annak valószínűségét, hogy $\xi(\omega)$ valamilyen páros egész értéket vesz fel.

Megoldás:

$$\begin{aligned}P\left(\{\omega\colon\ a<\xi(\omega)<b\}\right)&=\lim_{n\to\infty}P\left(\left\{\omega\colon a+\frac1n\le\xi(\omega)<b\right\}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[F(b)-F\left(a+\frac1n\right)\right].\end{aligned}$$

Egy tetszőleges u pontra $P(\xi=u)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[F\left(u+\frac1n\right)-F(u)\right]$. Ezért annak valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó valamely páros egész értéket vesz fel $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \left[F\left(2k+\frac{1}{n}\right)-F(2k)\right]$.

7.) Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, amelynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember mikor (8 plusz hány órakor) érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x,y) pont az egységnégyzet

$$A=\left\{(x,y)\colon\ -\frac{1}{2}\le y-x\le\frac{1}{2}\right\}\cap[0,1]\times[0,1]$$

részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

8.) Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

Megoldás: Ez a feladat is tárgyalható az elözö feladathoz hasonló módon. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, amelynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x,y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ uniójába esik: $A_1=\{(x,y)\colon x+y<0.8,\ 0\le x\le\frac{1}{2},\ 0\le y\le\frac{1}{2}\}$, $A_2=\{(x,y)\colon x+(1-y)<0.8,\ 1\le x\le\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\le y\le 1\}$, $A_3=\{(x,y)\colon 1-x+y<0.8,\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{1}{2}\}$, és $A_4=\{(x,y)\colon 1-x+1-y<0.8,\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ \frac{1}{2}\le y\le 1\}$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet a melynek csúcsai a $(0.3,\,0.5)$, $(0.5,\,0,3)$, $(0.7,\,0.5)$, és $(0.5,\,0.7)$ pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1-0.08=0.92$.

Később tárgyalni fogjuk e feladatok egy más megoldását is, amelyben a kívánt valószínűséget sűrűségfüggvények konvoluciójának segítségével számoljuk ki.

9.) Dobjunk le az egységintervallumra véletlenül, egymástól függetlenül 2 pontot. (Az, hogy egy pont az egységintervallum valamely részintervallumába esik egyenlő ezen intervallum hosszával.) Ez a két ledobott pont az egységintervallumot három részintervallumra osztja. Mi annak a valószínűsége, hogy az így létrejött három részintervallumból szerkeszthető háromszög?

Megoldás: A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha teljesítik a háromszögegyenlőtlenséget, azaz bármely kettő összhossza nagyobb, mint a harmadik intervallum hossza. Mivel a három részintervallum összhossza 1, ez ekvivalens azzal, hogy mindegyikük hossza kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Legyen az első ledobott pont koordinátája x a második ledobott ponté pedig y. Ekkor az (x, y) pont egyenletes eloszlású a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzeten, és a keletkezett szakaszok hossza x, $y-x$ és $1-y$, ha $x < y$, és y, $x-y$ és $1-x$, ha $x > y$. A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a következő két (egymást kizáró) esemény valamelyike bekövetkezik:

a.) $0 \le x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y < 1$, $0 < y - x < \frac{1}{2}$,

b.) $0 \le y < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $0 < x - y < \frac{1}{2}$.

(Az a.) eset felel meg annak, hogy $x < y$, a b.) eset annak, hogy $y < x$.) Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy mind az a) mind a b) eset teljesülése azt jelenti, hogy az (x, y) pont az egységnégyzet egy $\frac{1}{2}$ befogókkal rendelkező szabályos derékszögű egyenlőszárú háromszögbe esik. (E két háromszög csúcsai a $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és $(\frac{1}{2}, 1)$ illetve az $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és $(1, \frac{1}{2})$ pontok.) Így a keresett valószínűség $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

10.) Adjuk meg a következő véletlen jelenség egy lehetséges modelljét a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle modelljében: Egy urnában n fehér és m piros golyó van. Kihúzunk k golyót, $k \le n + m$, visszatevés nélkül úgy, hogy minden húzásnál az urnában a húzás előtt lévő golyók mindegyikét egyforma a valószínűséggel húzzuk.

Megoldás: Legyenek az elemi események az $\omega = (\dots, P, \dots, F, \dots)$ az n darab F és m darab P jelből álló sorozatok. Legyen Ω az összes ilyen sorozatból álló halmaz, álljon a $\mathcal{A}$ σ-algebra az Ω halmaz összes részhalmazából. A $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, valószínűségek definiciója érdekében vezessük be a következő mennyiségeket. Adva egy $\omega \in \Omega$ sorozat és egy j, $1 \le j \le n + m$, szám, legyen $F(\omega, j)$ és $P(\omega, j)$ az ω sorozat első $j - 1$ tagjában szereplő F illetve P jelek száma. Legyen $P(\{\omega\}) = \prod\limits_{j=1}^{n+m} A(\omega, j)$, ahol $A(j, m) = \frac{n-F(\omega,j)}{n+m-j+1}$, ha az ω sorozat j-ik tagja F, és $A(j, m) = \frac{m-P(\omega,j)}{n+m-j+1}$, ha az ω sorozat j-ik tagja P. (Vegyük észre, hogy $A(\omega, j)$ annak a valószínűsége, hogy a j-ik húzásban olyan színű golyót húzunk, mint az ω sorozat j-ik tagja. Ezután definiáljuk a $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ valószínűségeket minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra.

Megjegyzés: A fenti modell nem az egyetlen lehetséges modellje a kívánt példában. Például tekinthetünk két urnát, mindkettőben n piros és m fehér golyót, és húzzuk ki ezek mindegyikét visszatevés nélkül. Ennek a modelljét is hasonló módon definiálhatjuk, és ilyen módon az előző feladat egy másik megoldását kapjuk. Mind a két megoldásban definiáljuk az előző feladatban $\{\omega\}$-val jelölt eseményeit, és ugyanúgy adjuk meg ezek valószínűségét. A különbség az, hogy az új modellben ezek az $\{\omega\}$ halmazok nem elemi események. Ennek azonban nincs jelentősége akkor, amikor visszatevés nélküli urnamodellekről szóló valószínűségi problémákkal foglalkozunk.

11.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül.* Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5}\cdot\frac{30}{49}=\frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye piros és a második húzás eredménye fehér. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5}\cdot\frac{30}{49}=\frac{60}{245}$.

Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér, megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, amelyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogom látni, hogy ez a két valószínűség azok megegyezik. Egy olyan kissé általánosabb állítást fogok bebizonyítani, amely hasznos más feladatok megoldásában is. Ennek érdekében bevezetem a következő fogalmat.

Felcserélhető valószínűségi változók véges sorozatának a definiciója. *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ diszkrét eloszlású valószínűségi változók valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, amelyek értékeiket valamely $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazon veszik fel. Jelölje $\Pi(n)$ az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz összes permutációjából álló halmazt. Azt mondjuk, hogy a $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók felcserélhetőek, ha akárhogy választunk ki egy $\pi=(\pi(1),\dots,\pi(n))\in\Pi(n)$ permutációt és $x_l\in X$, $1\le l\le n$, elemeket az X halmazból, teljesül a*

$$P(\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\dots,\xi_n=x_n)=P(\xi_{\pi(1)}=x_1,\xi_{\pi(2)}=x_2,\dots,\xi_{\pi(n)}=x_n)$$

azonosság.

A felcserélhető valószínűségi változók szemléletes tartalma a következő. Felcserélhető valószínűségi változók esetében a $P(\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\dots,\xi_n=x_n)$ valószínűség csak attól függ, hogy a tekintett $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók milyen $x\in X$ értékeket vesznek fel és milyen multiplicitással, de nem függ attól, hogy milyen sorrendben veszik fel ezeket az értékeket. Az alábbiakban bebizonyítom felcserélhető valószínűségi változók egy (egyszerű) tulajdonságát, majd megmutatom, hogy ez segít befejezni az előző feladat megoldását.

Lemma felcserélhető valószínűségi változók véges dimenziós eloszlásairól. *Legyenek* $\xi_1,\dots,\xi_n$ *diszkrét eloszlású, felcserélhető valószínűségi változók egy* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *valószínűségi mezőn, amelyek értékeiket valamely* $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ *véges vagy megszámlálható halmazon veszik fel. Tekintsünk valamilyen rögzített* $1\le k\le n$ *számot, az* X *tér valamely* $x_l\in X$, $1\le l\le k$, *elemeinek sorozatát és az* $\{1,\dots,n\}$ *halmaz egy* k *elemű* $\{j_1,\dots,j_k\}\subset\{1,\dots,n\}$ *részhalmazát. Érvényes a*

$$P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_k=x_k)=P(\xi_{j_1}=x_1,\dots,\xi_{j_k}=x_k)$$

azonosság.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy olyan $\pi\in\Pi(n)$ permutációt, amelyre $\pi(1)=j_1$, $\pi(2)=j_2$, $\dots$, $\pi(k)=j_k$. Felírhatjuk a

$$\begin{aligned}&P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_k=x_k)\\&\quad=\sum_{x_l\colon x_l\in X,\ \text{ha }k+1\le l\le n}P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_k=x_k,\,\xi_{k+1}=x_{k+1},\dots,\xi_n=x_n)\end{aligned}$$

azonosságot. Ezért a valószínűségi változók felcserélhetősége miatt

$$\begin{aligned}&P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_k=x_k)\\&\quad=\sum_{x_l\colon x_l\in X,\ \text{ha }k+1\le l\le n}P(\xi_1=x_1,\dots,\xi_k=x_k,\,\xi_{k+1}=x_{k+1},\dots,\xi_n=x_n)\\&\quad=\sum_{x_l\colon x_l\in X,\ \text{ha }k+1\le l\le n}P(\xi_{\pi(1)}=x_1,\dots,\xi_{\pi(k)}=x_k,\,\xi_{\pi(k+1)}=x_{k+1},\dots,\xi_{\pi(n)}=x_n)\\&\quad=P(\xi_{\pi(1)}=x_1,\dots,\xi_{\pi(k)}=x_k)=P(\xi_{j_1}=x_1,\dots,\xi_{j_k}=x_k),\end{aligned}$$

és ezekből az azonosságokból következik a lemma állítása.

12.) Tekintsük a következő modellt. Adva van egy urna, abban n fehér és m piros golyó. Kihúzunk k darab golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszatesszük, és visszadobunk az urnába r, $-\infty<r<\infty$, olyan színű golyót, mint amilyen a kihúzott golyó színe volt. (Feltesszük, hogy elég sok golyó van az urnában ahhoz, hogy ezt az eljárást végrehajthassuk. Az, hogy $r<0$ tesszünk az urnába azt jelenti, hogy $|r|$ golyót kiveszünk az urnából.) Vezessük be a következő ξ_j, $1\le j\le k$, valószínűségi változókat. Ha a j-ik húzás eredménye fehér színű golyó akkor $\xi_j=F$, ha piros színű golyó, akkor $\xi_j=P$. Lássuk be, hogy a ξ_j, $1\le j\le k$, valószínűségi változók felcserélhetőek. Fejezzük be ennek az eredménynek a segítségével a 11. feladat megoldását.

Megoldás. Adva egy k hosszúságú $(\dots,P\dots,F\dots)$ P és F jelekből álló sorozat jelölje $B=B(\dots,P\dots,F\dots)$ azt az eseményt, hogy k húzás során ez az eredmény következett be. Definiáljuk minden $1\le j\le k$ számra és az előbb definiált B halmazra az $R(j,B)$ mennyiséget, amely

$$n+(r\times\text{az első }j-1\text{ húzásban kihúzott fehér golyók száma}),$$

ha a j-ik kihúzott golyó fehér, és

$$m + (r \times \text{az első } j-1 \text{ húzásban kihúzott piros golyók száma}),$$

ha a j-ik kihúzott golyó piros. Ekkor $P(B) = \prod_{j=1}^{k} \frac{R(j,B)}{n+m+(j-1)r}$, mert a j-ik húzás előtt $n+m+(j-1)r$ golyó van az urnában, és ebből $R(j,B)$ az olyan színű golyók száma, mint amilyet a j-ik húzásban húztunk. A $P(B)$ valószínűség értékét megadhatjuk a következő módon is. $P(B) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{l(B)} (n+(j-1)r) \prod\limits_{j=1}^{k-l(B)} (m+(j-1)r)}{\prod\limits_{j=1}^{k} (n+m+(j-1)r)}$, ahol $l(B)$ jelöli a B esemény bekövetkezése esetén kihúzott fehér golyók számát. (Ezért $k - l(B)$ a kihúzott piros golyók száma.) Mivel a B halmaz egy olyan esemény indikátor függvénye, hogy egy előírt húzássorozat következett be, és ennek valószínűsége csak a húzássorozatban szereplő fehér és piros golyók számától függ, ezért a ξ_j, $1 \le j \le k$, valószínűségi változók felcserélhetőek.

A visszatevéses golyóhúzás modelljét tekinthetjük úgy is, mint az ebben a feladatban tekintett modellt a speciális $r = -1$ esetben. Ezért alkalmazhatjuk rá az előbb kimondott lemmát. Ebből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a j_1-ik, …, j_s-ik húzások értéke valamely előírt piros és fehér golyókból álló húzássorozat megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első, második, …, s-ik húzások eredménye ugyanaz a húzássorozat. Speciálisan, annak valószínűsége, hogy az ötödik húzás eredménye piros megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros. Annak a valószínűsége, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér egyenlő annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, és a második fehér. Ez utóbbi valószínűségeket pedig már kiszámoltuk.

13.) Legyen ξ és η két független egyforma eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\xi - \eta$ szórásnégyzetét.

Megoldás: $\operatorname{Var}(\xi - \eta) = \operatorname{Var}(\xi + (-1)\cdot\eta) = \operatorname{Var}\xi + \operatorname{Var}\eta = 2\operatorname{Var}\xi$.

14.) Feldobunk két szabályos dobókockát 100-szor. Vesszük minden dobáspár után a két dobás eredményének a szorzatát. Számoljuk ki ezen véletlen szorzatok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Jelölje ξ_j és η_j a j-ik dobás során az első illetve második kocka dobáseredményét, és legyen $\zeta_j = \xi_j\eta_j$, $1 \le j \le 100$. Ekkor minket az $X = \sum\limits_{j=1}^{100} \zeta_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Felírhatjuk, hogy $EX = \sum\limits_{j=1}^{100} E\zeta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j E\eta_j$, és

$$\operatorname{Var} X = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\zeta_j = \sum_{j=1}^{100} (E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2) = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j^2 E\eta_j^2 - \sum_{j=1}^{100} (E\xi_j E\eta_j)^2.$$

Továbbá, $E\xi_j = E\eta_j = \frac{7}{2}$, és $E\xi_j^2 = E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$ minden $1 \le j \le 100$ számra. Innen $EX = 100 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 1225$, és $\operatorname{Var} X = 100\left(\left(\frac{91}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^4\right) = 79 + \frac{39}{144}$.

15.) Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a j-ik dobáseredménye k, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 darab ξ_j^3 alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3 \cdot 10 \cdot 9$ darab $\xi_j^2\xi_k$, $j \ne k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges (j,k) párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a k (a négyzetre nem emelt tényező) három helyen szerepelhet a szorzatban. (Tehát például a $\xi_1\xi_2^2$ alakú tagnak 3 lesz az együtthatója a szorzatban.) Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá, hasonló meggondolások alapján láthatjk, hogy $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú tag, ahol a j, k és l indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j\xi_k\xi_l = (E\xi_1)^3$. Valóban, a $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú alakú tagok összeszámlálásánál vegyük észre, hogy $1 \le j < k < l \le 10$ alakú számhármasokat $\binom{10}{3}$ féleképp választhatunk, a ξ_j tényező a szorzatban 3-féleképp jelenhet meg, a szorzat első, második vagy harmadik tagjában, a ξ_k tényező ezután 2-féleképp, a ξ_l tényező pedig egyféleképp választható. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban.

Innen a várható érték additívitását kihasználva azt kapjuk, hogy $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1 E(\xi_1^2) + 720\,(E\xi_1)^3 = 735 + 14332.5 + 30870 = 45937.5$, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \frac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 73.5$.

16.) Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \ne k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$ és szórásnégyzete $20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot \frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

17.) Feldobunk egy szabályos pénzérmét 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \frac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \frac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} \operatorname{Var} \xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le 99} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \ge j+2$, mert ebben az esetben ξ_j és ξ_k függetlenek, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ minden $1 \le j \le 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1} = 1$, ha a j-ik, $j+1$-ik és $j+2$-ik dobások mindegyike fej, aminek valószínűsége $\frac{1}{8}$, és $\xi_j\xi_{j+1} = 0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{16}$. Ezenkívül $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Innen $\operatorname{Var} S = 99 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{98}{16} = \frac{493}{16}$.

18.) Egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. A páros sorszámú húzások esetén fehér golyó húzás esetén nyerünk 3 forintot, piros golyó húzás esetén pedig nem nyerünk és nem veszítünk semmit. A páratlan sorszámú húzások esetén piros húzás esetén 2 forintot nyerünk, fehér golyó húzás esetén nem nyerünk és nem veszítünk semmit. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: Páros j számokra $\xi_j = 3$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Páratlan j számokra $\xi_j = 2$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, $\operatorname{Var} \xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciákat. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás eredménye piros $\frac{1}{3}$, annak valószínűsége, hogy j-ik húzás eredménye fehér $\frac{2}{3}$. Ezért $E\xi_j = 2$, ha j páros, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, ha j páratlan, és $ES = 5\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$.

A szórásnégyzet kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $E\xi_j^2 = 6$, $\operatorname{Var} \xi_j = 2$, ha j páros, és $E\xi_j^2 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{8}{9}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy két j és k indexre $j \ne k$, a j-ik és k-ik húzás mindegyike fehér $\frac{2 \cdot 19}{3 \cdot 29} = \frac{38}{87}$, annak, hogy mindkét húzás piros $\frac{9}{3 \cdot 29} = \frac{3}{29}$, annak, hogy az egyik húzás fehér, a másik húzás piros $\frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 29} = \frac{20}{57}$. Ezért $E\xi_j\xi_k = 9 \cdot \frac{2 \cdot 19}{3 \cdot 29} = \frac{114}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{114}{29} - 4 = -\frac{2}{29}$, ha j és k páros, $E\xi_j\xi_k = 4 \cdot \frac{3}{29} = \frac{12}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{12}{29} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{263}$, ha j és k páratlan,

$E\xi_j\xi_k = 6 \cdot \frac{20}{57} = \frac{40}{29}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = \frac{40}{29} - \frac{4}{3} = \frac{4}{87}$, ha j és k közül az egyik páros, a másik páratlan. Olyan (j,k) pár, $1 \le j,k \le 10$, $j \ne k$, amelyre j és k mindegyike páros vagy mindegyike páratlan, összesen 20 van, és olyan (j,k) pár, amelyekre az egyik páros, a másik páratlan $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ van, ezért

$$\sum_{1 \le j,k \le 10,\, j \ne k} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = 20\left(-\frac{2}{29} - \frac{8}{263}\right) + 50 \cdot \frac{4}{87} = \frac{80}{263}.$$

Innen

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\, S &= \sum_{j=1}^{10} \mathrm{Var}\,\xi_j + \sum_{1 \le j,k \le 10,\, j \ne k} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) \\ &= 5\left(2 + \frac{8}{9}\right) + \frac{80}{263} = \frac{130}{9} + \frac{80}{263} = \frac{3850}{263}. \end{aligned}$$

19.) Csodaország munka törvénykönyve szerint egy cég minden munkása fizetett szabadságot kap azokon a napokon, amikor legalább az egyiküknek születésnapja van. Ezen napok kivételével azonban az év minden napján mindenkinek dolgoznia kell. Minden munkás 1 TV-készüléket készít egy nap alatt. Mi a várható értéke és szórásnégyzete az egy évben gyártott TV készülékeknek, ha n munkás dolgozik a cégben? Hány alkalmazottat vegyen fel a cégtulajdonos, ha azt akarja, hogy a gyártott TV-készülékek számának a várható értéke a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás. Jelölje ξ_j, $1 \le j \le 365$, a j-ik nap gyártott TV-készülékek számát. Ekkor $\xi_j = n$, ha az n munkás egyikének sincs születésnapja a j-ik napon, és $\xi_j = 0$ egyébként. Ezért $P(\xi_j = n) = \left(\frac{364}{365}\right)^n$ és $P(\xi_j = 0) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. A gyártott TV-készülékek száma $Y = Y(n) = \sum\limits_{j=1}^{365} \xi_j$, ahonnan $EY = EY(n) = \sum\limits_{j=1}^{365} E\xi_j = 365n\left(\frac{364}{365}\right)^n$.

A szórásnégyzet kiszámolása érdekében számoljuk ki először a $\mathrm{Cov}\,(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i\xi_j - E\xi_i E\xi_j$ kovarianciákat $1 \le i,j \le 365$, $i \ne j$ esetén. $E\xi_i\xi_j = n^2 P(\xi_i = n, \xi_j = n) = n^2\left(\frac{363}{365}\right)^n$, mert $\left(\frac{363}{365}\right)^n$ a valószínűsége annak, hogy egyik munkásnak sincs születésnapja sem az i-ik sem a j-ik napon. Innen

$$\mathrm{Cov}\,(\xi_i, \xi_j) = n^2\left(\left(\frac{363}{365}\right)^n - \left(\frac{364}{365}\right)^{2n}\right),$$

és mivel $\mathrm{Var}\, Y = \sum\limits_{j=1}^{365} (E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2) + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le 365} \mathrm{Cov}\,(\xi_i, \xi_j)$

$$\mathrm{Var}\, Y = 365n^2\left(\left(\frac{364}{365}\right)^n - \left(\frac{364}{365}\right)^{2n}\right) + 365 \cdot 364 n^2\left(\left(\frac{363}{365}\right)^n - \left(\frac{364}{365}\right)^{2n}\right).$$

Számoljuk ki az $EY(n)$ maximumát az n változó szerint. Annak érdekében, hogy meghatározzuk mely n számra vétetik fel ez a maximum, számoljuk ki az $\frac{EY(n+1)}{EY(n)}$ hányadost minden pozitív egész n-re, és határozzuk meg, hogy az mely n-ekre kisebb, és mely n-ekre nagyobb, mint 1. $\frac{EY(n+1)}{EY(n)} = \frac{n+1}{n}\frac{364}{365}$, ahonnan $\frac{EY(n+1)}{EY(n)} > 1$, ha $n \le 363$, $\frac{EY(n+1)}{EY(n)} = 1$, ha $n = 364$, és $\frac{EY(n+1)}{EY(n)} < 1$, ha $n \le 365$. Ezért 364 vagy 365 munkást érdemes felvenni, és ekkor az évente gyártott TV készülékek száma $\frac{364^{365}}{365^{363}} = 364^2\left(1 - \frac{1}{365}\right)^{363} \sim \frac{364^2}{e}$.

20.) Egy kártyacsomag 75 kártyalapot tartalmaz, amelyek mindegyike az 1 és 75 közötti számok valamelyikével meg van számozva. Kihúzunk 40 kártyát visszatevéssel, és jelölje X az ily módon kapott különböző kártyák számát. Számoljuk ki az EX várható értéket.

Megoldás: Számozzuk meg a kártyákat 1-től 75-ig, és vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 75$ valószínűségi változókat. $\xi_j = 1$, ha a j-ik kártyát kiválasztjuk, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kártyát nem választjuk ki a 40 húzás során. Ekkor $X = \sum\limits_{j=1}^{75} \xi_j$.

Ezért $EX = \sum\limits_{j=1}^{75} E\xi_j = \sum\limits_{j=1}^{75} P(\xi_j = 1)$. Annak a valószínűsége, hogy a j-ik kártyát nem húzzuk ki 40 húzás során $(\frac{74}{75})^{40}$. Innen $P(\xi_j = 1) = 1 - (\frac{74}{75})^{40}$, $EX = 75\left(1 - (\frac{74}{75})^{40}\right)$.

20a.) Számoljuk ki az előző feladatban definiált X valószínűségi változó $\mathrm{Var}\, X$ szórásnégyzetet.

Jelölje Y a ki nem húzott kártyák számát, és vezessük be az $\eta_j = 1-\xi_j$, $1 \le j \le 75$, valószínűségi változókat, amelyekre $y_j = 1$, ha a j-ik kártyát nem választjuk ki, és $\eta_j = 0$, ha a j-ik kártyát kiválasztjuk a 40 húzás során. Ekkor $Y = \sum\limits_{j=1}^{75} \eta_j$, és $Y = 75 - X$, ahonnan $\mathrm{Var}\, Y = \mathrm{Var}\, X$ az előző feladatban definiált X valószínűségi változóval.

$\mathrm{Var}\, X = \mathrm{Var}\, Y = \sum\limits_{j=1}^{75} \mathrm{Var}\, \eta_j + 2 \sum\limits_{1\le i<j\le 75} \mathrm{Cov}\,(\eta_i, \eta_j)$. Másrészt $\mathrm{Var}\, \eta_j = P(\eta_j = 1) - P(\eta_j = 1)^2$, és $\mathrm{Cov}\,(\eta_i, \eta_j) = P(\eta_i = 1, \eta_j = 1) - P(\eta_i = 1)P(\eta_j = 1)$, ha $i \ne j$. Továbbá $P(\eta_i = 1, \eta_j = 1) = \left(\frac{73}{75}\right)^{40}$, $P(\eta_i = 1) = P(\eta_j = 1) = \left(\frac{74}{75}\right)^{40}$. Innen $\mathrm{Cov}\,(\eta_i, \eta_j) = \left(\frac{73}{75}\right)^{40} - \left(\frac{74}{75}\right)^{80}$, és $\mathrm{Var}\, \eta_j = \left(\frac{74}{75}\right)^{40} - \left(\frac{74}{75}\right)^{80}$. Ezért

$$\mathrm{Var}\, X = \mathrm{Var}\, Y = 75\left(\frac{74}{75}\right)^{40}\left(1 - \left(\frac{74}{75}\right)^{40}\right) + 74\cdot 75\left(\left(\frac{73}{75}\right)^{40} - \left(\frac{74}{75}\right)^{80}\right).$$

Megjegyzés: A 20. feladatot a vizsgált X valószínűségi változó $X = \sum\limits_{j=1}^{75} \xi_j$ alakú felbontásának segítségével oldottuk meg egyszerűbb valószínűségi változók összegeként. Más felbontással is kisérletezhetünk volna. Például írhattuk volna, hogy $X = \sum\limits_{j=1}^{40} \zeta_j$, ahol $\zeta_j = 1$, ha a j-ik húzáskor új kártyát húzunk, és $\zeta_j = 0$, ha nem. Ekkor is felírhatjuk az $EX = \sum\limits_{j=1}^{40} E\zeta_j$, azonosságot. Ez a módszer mégsem olyan hasznos, mint a feladat megoldásában alkalmazott eljárás, mert az $E\zeta_j = P(\zeta_j = 1)$ várható értékeket nem egyszerű kiszámolni. Ez azt mutatja, hogy érdemes a minket érdeklő valószínűségi változó számunkra hasznos felbontását keresni, és ez nem mindig magától értetődő.

21.) Legyen két urna, mind a kettőben 10 piros és 10 fehér golyó. Egymás után kihúzunk nyolc golyót mind a két urnából, az elsőből visszatevés nélkül, a másodikból visszatevéssel. Ha a j-ik húzásnál a két urnából kihúzott golyó egyforma színű, akkor két forintot nyerünk, ha különböző színűek, akkor egy forintot veszítünk, $1 \le j \le 8$. Számítsuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 8$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik húzásnál mind két urnából piros vagy mind a két urnából fehér golyót húzunk, és $\xi_j = -1$, ha az egyik urnából fehér és a másik urnából piros golyót húzunk. Akkor a minket érdeklő mennyiségek a $S = \sum\limits_{j=1}^{8} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete. Ennek kiszámítása érdekében számítsuk ki az $E\xi_j$, $\mathrm{Var}\,\xi_j$ és $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ mennyiségeket. Vegyük észre, hogy $P(\xi_j = -1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, mert kifejezve külön annak a valószínűségét, hogy (fehér, piros) vagy (piros, fehér) húzás történik. Hasonlóan $P(\xi_j = 2) = \frac{1}{2}$. Ezért $E\xi_j = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}(4+1) = \frac{5}{2}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \frac{9}{4}$.

Hasonlóan, $P(\xi_j = 2, \xi_k = 2) = P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 2) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{19} = \frac{1}{4}$, $P(\xi_j = 2, \xi_k = -1) = P(\xi_1 = 2, \xi_2 = -1) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{10}{19} + \frac{9}{19}\right) = \frac{1}{4}$, $P(\xi_j = -1, \xi_k = -1) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1) = \frac{1}{4}$ (itt felsoroltuk, hogy például a $\xi_1 = 2, \xi_2 = 2$ azt jelenti, hogy az ((F,F),(F,F)), ((F,F),(P,P)), ((P,P),(F,F)) vagy ((P,P),(P,P)) húzássorozatok valamelyike következik be. Ezért $E\xi_j\xi_k = P(\xi_j = -1, \xi_k = -1) + 4P(\xi_j = 2, \xi_k = 2) - 2P(\xi_j = -1, \xi_k = 2) - 2P(\xi_j = 2, \xi_k = -1) = \frac{1}{4}(1 + 4 - 4) = \frac{1}{4}$, és $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$. Innen következik, hogy a ξ_j valószínűségi változók korrelálatlanok, és $ES = 8E\xi_1 = 2$, $\mathrm{Var}\,S = 8\mathrm{Var}\,\xi_1 = 18$.

22.) Véletlenül meghívunk 30 embert. Tegyük fel, hogy az egyes embereknek egymástól függetlenül van születésnapjuk, és minden ember esetében $\frac{1}{365}$ annak a valószínűsége, hogy az év valamely napján született. Mi annak a valószínűsége, hogy van két ember a társaságban, akiknek ugyanaznap van a születésnapjuk?

Általánosabban, van n urna, amelyekbe bedobunk egymástól függetlenül k golyót úgy, hogy mindegyik golyó egyforma valószínűséggel esik az egyes urnákba. Mi annak a valószínűsége, hogy van olyan urna amelybe legalább két golyó esik? Érdekel minket továbbá ennek a valószínűségnek a viselkedése, ha mind az n mind a k szám nagy, és a $k = k(n)$ számnak megfelelő a nagyságrendje. Lássuk be, hogy a fenti valószínűségnek van határértéke, ha $n \to \infty$, $\frac{k}{\sqrt{n}} \to \alpha$ valamilyen $0 \le \alpha < \infty$ számmal, és határozzuk meg ezt a határértéket.

Megoldás: Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, hogy a j-ik embernek az év hanyadik napján van a születésnapja. Ekkor a ξ_j, $1 \le j \le 30$, valószínűségi változók függetlenek, $P(\xi_j = l) = \frac{1}{365}$, $1 \le j \le 30$, $1 \le l \le 365$, és $P(\xi_j \ne \xi'_j$ ha $j \ne j')$ annak a valószínűsége, hogy mindenkinek különböző nap van a születésnapja. Ez a valószínűség viszont

$$\frac{365 \cdot 364 \cdots (365-30+1)}{365^k} = \prod_{j=1}^{29} \left(1 - \frac{j}{365}\right),$$

mert annak valószínűsége, hogy az első ember születésnapja az l_1-ik, a másodiké az l_2-ik és így tovább a k-ik ember születésnapja az l_k-ik napon van $\frac{1}{365^k}$, tetszőleges $1 \le l_j \le 365$, $1 \le j \le 30$ számok esetén, és ezeket a számokat $\prod\limits_{j=0}^{k-1} (365-j)$ módon választhatjuk úgy, hogy mindegyik l_j szám különböző legyen. Így annak a valószínűsége, hogy van két ember akinek ugyanazon a napon van a születésnapja $1 - \prod\limits_{j=1}^{29} \left(1 - \frac{j}{365}\right)$.

Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy ha k golyót dobunk n urnába az adott módon, akkor van olyan urna, amelyikbe legalább két golyó esik $1 - \prod\limits_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$.

Adjunk jó közelítést a $\log \prod\limits_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \sum\limits_{j=1}^{k-1} \log \left(1 - \frac{j}{n}\right)$ kifejezésre, ha $n \to \infty$, $\frac{k(n)}{\sqrt{n}} \to \alpha$. Heurisztikus érvelés szerint mivel $\log \left(1 - \frac{j}{n}\right) \sim -\frac{j}{n}$ a $\log(1+x)$ függvény Taylor sorfejtése szerint, ezért $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \log \left(1 - \frac{j}{n}\right) \sim -\sum\limits_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} = -\frac{(k-1)k}{2n}$, ahonnan $\log \prod\limits_{j=1}^{k(n)-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \to -\frac{\alpha^2}{2}$, ha $n \to \infty$, és $\frac{k(n)}{\sqrt{n}} \to \alpha$. Ez a számolás precizzé tehető, ha felhasználjuk például azt az egyenlőtlenséget, amely szerint

$$\left|\log \left(1 - \frac{j}{n}\right) + \frac{j}{n}\right| \le \frac{2j^2}{n^2} \le \frac{\text{const.}}{n}, \qquad \text{ha } n \text{ elég nagy és } \frac{j}{\sqrt{n}} \le \alpha + 1,$$

ami szintén következik a $\log(1+x)$ Taylor sorfejtéséből. Innen azt kapjuk, hogy $1 - \prod\limits_{j=1}^{k(n)-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \to 1 - e^{-\alpha^2/2}$, ha $n \to \infty$, és $\frac{k(n)}{\sqrt{n}} \to \alpha$.

23.) Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x) = \int f(y) f(x-y)\, dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2} \le x-y \le \frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2} + x \le y \le \frac{1}{2} + x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi + \eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x| > 1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x)=0$. Ha $0\le x\le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac12+x,\frac12\right]$ intervallum, és ennek hossza $1-x$, azaz ebben az esetben $g(x)=1-x$. Ha $-1\le x\le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac12,\frac12+x\right]$ intervallum amelynek hossza $1+x=1-|x|$, azaz $g(x)=1+x=1-|x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x)=1-|x|$, ha $|x|\le 1$, és $g(x)=0$, ha $|x|>1$.

Megadok egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást.

Számítsuk ki először a $\xi+\eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K=\left[-\frac12,\frac12\right]\times\left[-\frac12,\frac12\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A\subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi,\eta)\in A)=\lambda(A\cap K)$. Speciálisan, $G(x)=P(\xi+\eta<x)=\lambda(K\cap\{(u,v)\colon\ u+v<x\})$. Ha $x\le -1$, akkor $G(x)=0$, ha $-1\le x\le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac12,-\frac12\right)$, $\left(-\frac12,\frac12+x\right)$ és $\left(\frac12+x,-\frac12\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac12(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x\ge 1$, akkor $G(x)=1$. Ha $0\le x\le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, amelyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac12,\frac12\right)$, $\left(\frac12,-\frac12+x\right)$ és $\left(-\frac12+x,\frac12\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x)=1-\frac12(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x)=0$, ha $|x|\le 1$, $g(x)=1+x$, ha $-1\le x\le 0$, és $g(x)=1-x$, ha $0\le x\le 1$.

24.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Hogyan számoljuk ki $\xi-\eta$ sűrűségfüggvényét?

Megoldás. $\xi-\eta=\xi+(-\eta)$. Ha η sűrűségfüggvénye $g(x)$ akkor $-\eta$ sűrűségfüggvénye $g^-(x)=g(-x)$. Ez szemléletesen nyílvánvaló, egy lehetséges formális magyarázat a következő. Legyen $G(x)$ η eloszlásfüggvénye. Ekkor $g(x)=\frac{dG(x)}{dx}$, és $-\eta$ el-oszlásfüggvénye $G^-(x)=P(-\eta<x)=P(\xi>-x)=1-P(\eta\le -x)=1-G(-x)$. (Mivel η-nak van sűrűségfüggvénye, ezért $P(\eta\le -x)=P(\eta<-x)$.) Ezért $-\eta$ sűrűségfüggvénye $g^-(x)=\frac{dG^-(x)}{dx}=\frac{1-G(-x)}{dx}=g(-x)$.

Innen $\xi-\eta=\xi+(-\eta)$ sűrűségfüggvénye $f*g^-(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g^-(x-y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(y-x)\,dy$.

25.) Legyen ξ és η két független egyforma eloszlású valószínűségi változó valamely $[a,a+1]$ illetve $[b,b+1]$ intervallumon. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ és $\xi-\eta$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A feladatot meg lehet oldani megfelelő konvoluciók kiszámításának a segítségével. De mivel ezt a feladatot már megoldottuk egy speciális esetben a 23. feladatban, ezért egyszerűbb a feladat megoldását visszavezetni erre a speciális esetre. Ennek érdekében vezessünk be két független ξ_0 és η_0 a $[-\frac12,\frac12]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót. Feltehetjük, hogy $\xi=\xi_0+a+\frac12$ és $\eta=\eta_0+b+\frac12$. Ekkor $\xi+\eta=\xi_0+\eta_0+a+b+1$, $\xi-\eta=\xi_0-\eta_0+a-b$. Ezenkívül $\xi_0+\eta_0$ és $\xi_0-\eta_0$ sűrűségfüggvénye megegyezik, és ez az említett feladat eredménye szerint $g(x)=1-|x|$, ha $-1\le x\le 1$, $g(x)=0$, ha $x<-1$ vagy $x>1$. Innen $x+\eta$ sűrűségfüggvénye $g(x-a-b-1)=1-|x-a-b-1|$, ha $|x-a-b-1|\le 1$, $g(x-a-b-1)=0$, ha $|x-a-b-1|>1$, $\xi-\eta$ sűrűségfüggvénye $g(x-a+b)=1-|x-a+b|$, ha $|x-a+b|\le 1$, $g(x-a+b)=0$, ha $|x-a+b|>1$.

26.) Oldjuk meg a 7. és 8. feladatot a konvolucióról bizonyított eredmények alapján.

Megoldás: A 7. feladatban jelölje ξ és η azokat a valószínűségi változókat, amelyek azt mérik, hogy mikor érkezett a térre az első illetve a második ember. Ekkor ξ és η független valószínűségi változók, és egyenletes eloszlásúak a $[8, 9]$ intervallumban. Minket a $P(|\xi - \eta| < \frac{1}{2})$ valószínűség érdekel. Viszont $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye $f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $f(x) = 0$, ha $x > 1$. Innen $P(|\xi - \eta| < \frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = 2\int_0^{1/2}(1-x)\,dx = \frac{3}{4}$.

A 8. feladatban jelölje ξ és η azokat a valószínűségi változókat, amelyek azt mérik, hogy milyen hosszú az első és második eltört bot rövidebb vége. Ekkor ξ és η független valószínűségi változók, és egyenletes eloszlásúak a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumban. (Egy bot rövidebb végének a hossza kisebb, mint x, ha a bot baloldali vége rövidebb, mint x vagy hosszabb, mint $1 - x$. Minket a $P(\xi + \eta < 0.8)$ valószínűség érdekel. Viszont $\xi + \eta$ sűrűségfüggvénye $f(x) = 2(1 - |1 - 2x|)$, ha $0 < x \le 1$, és $f(x) = 0$, ha $x > 1$, vagy $x < 0$. Innen $P(\xi - \eta < 0.8) = \int_0^{0.8} f(x)\,dx = 1 - \int_{0.8}^1 f(x)\,dx = 1 - \int_{0.8}^1 (4 - 4x)\,dx = 1 - 0.08 = 0.92$.

27.) Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x > 0$. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

Általánosabban, legyenek $\xi_1, \dots \xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy $\xi_1 + \cdots + \xi_m$ sűrűségfüggvénye $f_m(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $f_m(x) < 0$, ha $x < 0$.

Megoldás: Ki kell számolnunk az $f * f(x)$ illetve $\underbrace{f * \cdots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x) = 0$, ha $x \le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y \le 0$ vagy $x - y \le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x \ge 0$ esetén lehet nulla, az $x \le 0$ esetben $f(y)f(x-y) > 0$ minden y-ra nulla, és $x \ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y) > 0$ integrandus csak $0 \le y \le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x) = f * f(x)$ $x < 0$-ra $f_2(x) = 0$, és

$$f_2(x) = f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy$$
$$= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x \ge 0.$$

Hasonlóan, ha $f_m(x) = \underbrace{f * \cdots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1 + \cdots \xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x) = 0$ minden $m \ge 1$ számra, ha $x < 0$. Azt állítom, hogy $f_m(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1} * f(x) = f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$f_{m-1} * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y) f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{m-1} \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)}\,dy$$

$$= \lambda^m e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\, dy = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x \ge 0.$$

Másrészt $f_m(x) = 0$, ha $x \le 0$.

28.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, mind a kettő $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be először, hogy $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Az $f(x)$ függvény minden pontban nem negatív. Annak ellenőrzéséhez, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatnunk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Ez igaz, mert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$.

A $\xi+\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\, dy$ formula segítségével számíthatjuk ki. Számítsuk ki ezt az integrált. Tekintsük először azt az esetet, amikor $x \ge 0$. Az integrált számítsuk ki úgy, hogy nézzük mind a négy (elvileg) lehetséges esetet, amikor a) $y \ge 0$ és $x - y \ge 0$, b) $y \ge 0$ és $x-y < 0$, c) $y < 0$, $x-y \ge 0$, d) $y < 0$, $x-y < 0$. Számítsuk ki mind a négy esetben azt, hogy milyen tartományban veszi fel értékét az y változó, és mi az integrandus illetve az integrál értéke ebben a tartományban. Az a) esetben $0 \le y \le x$, az integrandus $f(y)f(x-y) = \frac{1}{4}e^{-y}e^{-(x-y)} = \frac{e^{-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{xe^{-x}}{4}$ az a) tartományban. A b) esetben $y > x$ és $f(y)f(x-y) = \frac{e^{-y}e^{x-y}}{4} = \frac{e^{x-2y}}{4}$ az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_x^{\infty} e^{x-2y}\, dy = \frac{e^{-x}}{8}$, a c) esetben $y < 0$ és $f(y)f(x-y) = \frac{1}{4}e^{y}e^{-(x-y)} = \frac{e^{2y-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2y-x}\, dy = \frac{e^{-x}}{8}$, a d) eset nem lehetséges, mert ekkor egyrészt az $y < 0$ másrészt az $y > x \ge 0$ feltételeknek kellene teljesülniük. Innen azt kapjuk, hogy $g(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{4}$, ha $x > 0$. Mivel f szimmetrikus függvény, ezért mint nem nehéz megmutatni, $f(x)$ is az. Tehát $g(-x) = g(x)$, és $g(x) = \frac{(|x|+1)e^{-|x|}}{4}$.

29.) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \ge 0$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolució segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f(x) = g * g(x) &= \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2}e^{-(x-u)/2}\, du \\ &= e^{-x/2}\int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \ge 0, \end{aligned}$$

és $f(x) = 0$, ha $x \le 0$.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2v-1)^2}},$$

ezért $u = 2v - 1$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\,dv &= \int_{-1}^{2x-1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\arcsin x\right]_{-1}^{2x-1} = \frac{\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}}{2\pi}.\end{aligned}$$

Innen következik, hogy a tekintett integrál értéke $x = 1$ esetén $\frac{1}{2}$, mivel $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

30.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Számítsuk ki a $\xi^2 + \xi^4$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jegyezzük meg, hogy mivel ξ^2 és ξ^4 *nem független* valószínűségi változók, ezért összegük sűrűségfüggvényét nem számolhatjuk konvolució segítségével. E-helyett meghatározzuk azt az $A(x)$ halmazt, amelyre $\xi+\xi^2 < x$ akkor és csak akkor, ha $\xi \in A(x)$. Ezután felírhatjuk a $P(\xi+\xi^2 < x) = P(\xi \in A(x))$ azonosságot. Az itt megjelenő valószínűséget, azaz $\xi+\xi^2$ eloszlásfüggvényét, ki tudjuk számolni a ξ eloszlásfüggvényének segítségével, majd a kerestt sűrűségfüggvényét is megkapjuk $\xi+\xi^2$ eloszlásfüggvényének a deriváltjaként. Az alábbiakban kidolgozom a számolás részleteit.

Számítsuk ki először $\xi^2 + \xi^4$ $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Ha $x < 0$, akkor $G(x) = 0$, mert $\xi^2 + \xi^4 \geq 0$ egy valószínűséggel. Ha $x > 0$, akkor a $P(\xi^2 + \xi^4 < x)$ valószínűségét kell kiszámítanunk. Legyen $u = u(x)$ az $u^2 + u - x = 0$ egyenlet nagyobb gyöke, az $u = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$, a kisebbik gyöke $\bar{u} = \frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ pedig olyan, hogy $\bar{u} < 0$. Nem nehéz belátni, hogy $\xi^2(\omega) + \xi^4(\omega) < x$ akkor és csak akkor, ha $0 \leq \xi^2(\omega) < u(x)$, ami azt jelenti, hogy $-\sqrt{u(x)} < \xi < \sqrt{u(x)}$. Innen $\xi^2 + \xi^4$ eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén $G(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) - 1$, ahol $\Phi(x)$ a $\xi+\xi^2$ eloszlásfüggvényének a deriváltjaként. Az alábbiakban kidolgozom a számolás részleteit.

Számítsuk ki először $\xi^2 + \xi^4$ $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Ha $x < 0$, akkor $G(x) = 0$, mert $\xi^2 + \xi^4 \geq 0$ egy valószínűséggel. Ha $x > 0$, akkor a $P(\xi^2 + \xi^4 < x)$ valószínűségét kell kiszámítanunk. Legyen $u = u(x)$ az $u^2 + u - x = 0$ egyenlet nagyobb gyöke, az $u = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$, a kisebbik gyöke $\bar{u} = \frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ pedig olyan, hogy $\bar{u} < 0$. Nem nehéz belátni, hogy $\xi^2(\omega) + \xi^4(\omega) < x$ akkor és csak akkor, ha $0 \leq \xi^2(\omega) < u(x)$, ami azt jelenti, hogy $-\sqrt{u(x)} < \xi < \sqrt{u(x)}$. Innen $\xi^2 + \xi^4$ eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén $G(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) =$

$2\Phi\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)-1$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Innen differenciálással kapjuk, hogy $\xi^2+\xi^4$ sűrűségfüggvénye $\frac{dG(x)}{dx}$, ahonnan ez a sűrűségfüggvény nulla, ha $x<0$, és

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left\{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{4}\right\}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}},\qquad \text{ha } x>0.$$

31.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek értékeiket a 0 és n közötti egész számok közül veszik fel egyenletes eloszlással, azaz $P(\xi=j)=P(\eta=j)=\frac{1}{n+1}$, $0\le j\le n$. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ valószínűségi változó eloszlását.

Megoldás: Világos, hogy a $\xi+\eta$ valószínűségi változó csak $0\le j\le 2n$ alakú egész számokat vesz fel pozitív valószínűséggel. Annak valószínűsége, hogy j értéket vesz fel a $0\le j\le 2n$ esetben

$$P(\xi+\eta=j)=\sum_{k=0}^{n}P(\xi=k,\eta=j-k)=\sum_{k=0}^{n}P(\xi=k)P(\eta=j-k).$$

Az ebben az összegben szereplő tagok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem nullák, tehát amelyek k paraméterére a $0\le k\le n$ feltétel mellett a $0\le j-k\le n$ azaz a $j-n\le k\le j$ feltétel is teljesül. Érdemes külön tekinteni azt az esetet, amikor $0\le j\le n$ és amikor $n<j\le 2n$. Ha $0\le j\le n$, akkor a $P(\xi+\eta=j)$ valószínűséget kifejező összegben $j+1$ nem zéró tag van (azok a tagok, amelyekre $0\le k\le j$), mindegyiknek az értéke $\frac{1}{(n+1)^2}$. Így a keresett valószínűség $P(\xi+\eta=j)=\frac{j+1}{(n+1)^2}$, ha $0\le j\le n$. Ha $n<j\le 2n$, akkor $2n-j+1$ nem zéró tag van a $P(\xi+\eta=j)$ valószínűséget kifejező összegben, (amikor $j-n\le k\le n$) és ezek értékei $\frac{1}{(n+1)^2}$-tel egyenlők. Ezért $P(\xi+\eta=j)=\frac{2n-j+1}{(n+1)^2}$, ha $n<j\le 2n$.

31a.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek értékeiket a $\frac{k}{n}$, $0\le k\le n$ alakú számokon veszik fel egyenletes eloszlással, azaz $P(\xi=\frac{j}{n})=P(\eta=\frac{j}{n})=\frac{1}{n+1}$, $0\le j\le n$. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ összeg eloszlását. Hasonlítsuk össze az eredményt két független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\tilde\xi$ és $\tilde\eta$ valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényével.

Megoldás: A keresett eloszlás $P(\xi+\eta=\frac{j}{n})=\frac{j+1}{(n+1)^2}$, ha $0\le j\le n$, $P(\xi+\eta=\frac{j}{n})=\frac{2n-j+1}{(n+1)^2}$, ha $n<j\le 2n$, és $P(\xi+\eta=x)=0$, ha x nem $x=\frac{j}{n}$, $0\le j\le 2n$ alakú szám. Ez következik a 31. feladat eredményéből. Ugyanis, ha az ott tekintett valószínűségi változókat $\bar\xi$-vel és $\bar\eta$-val jelöljük, akkor $\xi+\eta=\frac{1}{n}(\bar\xi+\bar\eta)$, és ezért $P(\xi+\eta=x)=P(\bar\xi+\bar\eta=nx)$ tetszőleges x számra. Ezért $P(\xi+\eta=x)$ csak $x=\frac{j}{n}$, $0\le j\le 2n$, esetben lehet nem nulla, és ott az előbb megadott értékeket veszi fel.

A $\tilde\xi+\tilde\eta$ sűrűségfüggvénye $f(x)=x$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=2-x$, ha $1\le x\le 2$, és $f(x)=0$, ha $x<0$ vagy $x>2$. A két eredményt összehasonlítva láthatjuk, hogy a $\xi+\eta$ összeg eloszlását megadó képlet a független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét megadó képlet diszkretizáltjának tekinthető. Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} nP(\xi = \frac{j_n}{n}) = f(x)$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{j_n}{n} = x$, és $f(x)$ jelöli $\tilde{\xi} + \tilde{\eta}$ sűrűségfüggvényét.

32.) Legyen η_1 és η_2 két független normális eloszlású valószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy az $\eta_1 + \eta_2$ összeg $m_1 + m_2$ várható értékű és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

A feladat megoldása előtt érdemes megjegyezni, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-A)^2/B}\,dx = \sqrt{B\pi}.$$

Ezt láthatjuk például az $y = \sqrt{2}\frac{x-A}{\sqrt{B}}$ helyettesítéssel, és abból a tényből, hogy a $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$ függvény sűrűségfüggvény. Ez az észrevétel azért hasznos, mert ez lehetővé teszi, hogy amennyiben olyan integrált kell kiszámolni, amelyben az integrandus exponensében egy kvadratikus alak szerepel, akkor az inegrandusban szereplő kifejezést teljes négyzetté alakítva ki tudjuk számolni az integrált. Ez a gondolata a jelen feladat megoldásának is.

Megoldás: Az $\eta_1 + \eta_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2} e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-u^2\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2}\right) + u\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-m_2}{\sigma_2^2}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Bigg\}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Bigg\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u - \frac{m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{(m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\Bigg\}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}u^2\right\}du \\
&\qquad\qquad \exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2 + (x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. A feladatot lehet egyszerűsíteni. Elég például arra az esetre koncentrálni a figyelmünket, amikor $m_1 = 0$ és $m_2 = 0$. Valóban, vezessük be az $\bar\eta_1 = \eta_1 - m_1$ és $\bar\eta_2 = \eta_2 - m_2$ valószínűségi változókat. Ekkor $\bar\eta_1$ és $\bar\eta_2$ független normális eloszlású valószínűségi változók 0 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Másrészt $\eta_1+\eta_2 = \bar\eta_1+\bar\eta_2+m_1+m_2$, és ha $\bar\eta_1+\bar\eta_2$ sűrűségfüggvénye $h(x)$, akkor $\eta_1+\eta_2$ sűrűségfüggvénye $h(x-m_1-m_2)$. Miért? Ez azt jelenti, hogy elég $\bar\eta_1+\bar\eta_2$ sűrűségfüggvényét kiszámolni.

33.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
Ee^{t\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{tu-u^2/2-t^2/2+t^2/2}\,du\\
&= e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t-u)^2/2}\,du = e^{t^2/2}.
\end{aligned}
$$

34.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó 2 várható értékkel és 3 szórásnégyzettel. Számoljuk ki minden valós t számra az $Ee^{t\xi}$ várható értéket.

Megoldás. A feladatot megoldhatjuk az előző feladat megoldásához hasonlóan. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét is fel tudjuk írni, és ezután az előző feladathoz hasonló integrál segítségével fel tudjuk írni a keresett várható értéket, és azt ehhez a feladathoz hasonlóan ki tudjuk számolni. De egyszerűbben is célhoz érhetünk. A feladatot közvetlenül visszavezethetjük erre a feladatra. Felírhatjuk ugyanis a ξ valószínűségi változót $\xi = \sqrt{3}\eta + 2$ alakban, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Innen következik, hogy $Ee^{t\xi} = Ee^{t(\sqrt{3}\eta+2)} = e^{2t}Ee^{t\sqrt{3}\eta} = e^{2t}Ee^{(\sqrt{3}t)\eta} = e^{2t+3t^2/2}$ az előző feladat eredménye alapján.

35.) A 2000. évben az Egyesült Államok Florida államában rendkívül szoros eredmény született az elnökválasztáson. 5 000 000 választó választó választott két párt, a republikánus és demokrata párt jelöltjei között. A két jelölt által szerzett szavazatok száma (egy adott időpontbeli felmérés szerint) mindössze 300 volt. Tegyük fel, hogy a választók egymástól függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választották valamelyik párt jelöltjét. E feltevés teljesülése estén mi annak a valószínűsége, hogy a két jelölt által összegyüjtött szavazatok különbsége nem haladja meg a háromszázat.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 5\ 000\ 000$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik választó a demokrata, $\xi_j = 0$, ha a j-ik választó a republikánus jelöltre szavaz. Ekkor $S = \sum\limits_{j=1}^{5\ 000\ 000}\xi_j$ a demokrata, és $5\ 000\ 000 - S$ a republikánus jelöltre leadott szavazatok száma, és minket a $P(|2S - 5\ 000\ 000| \le 300)$ valószínűség nagysága érdekel. Vegyük észre, hogy a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$, ezért $ES = 2\ 500\ 000$, $\operatorname{Var} S = \frac{1}{4}\cdot 5\ 000\ 000$, és a $P\left(\left|\frac{S-2\ 500\ 000}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 5\ 000\ 000}}\right| < x\right)$ valószínűségek kiszámítására alkalmazhatjuk a centrális határeloszlástételt. Ennek alapján

$$\begin{aligned}
P(|2S - 5\,000\,000| \leq 300) &= P\left(\left|\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}}\right| \leq \frac{150}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 5\,000\,000}}\right) \\
&\sim \Phi\left(\frac{150}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 5000000}}\right) - \Phi\left(-\frac{150}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 5000000}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{6\sqrt{5}}{100}\right) - 1 \sim 2\Phi(0.124) - 1 \sim 0.1.
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Valójában a feladatban tárgyalt modell némileg irreális. Általában különböző körzetek vannak, ahol a jelöltek népszerűsége eltérő. Egy jobb, a valóságot jobban közelítő modellben például azt tételezhatjük fel, hogy különböző körzetek vannak, az egyes körzetekben az egyes vélemények függetlenek, de az, hogy milyen valószínűséggel választja egy választó valamelyik jelöltet attól is függ, hogy mely körzetben lakik. Ez a modell is vizsgálható a centrális határeloszlástétel segítségével, de itt már a centrális határeloszlástétel általánosabb, független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók összegének határeloszlását leíró alakjára van szükség.

36.) Tekintsünk egy szabályos pénzdarab 10 000 egymás utáni (független) feldobásából származó fej-írás sorozatot. Adjunk becslést a Csebisev egyenlőtlenség segítségével annak valószínűségére, hogy a fej-dobások számának eltérése a várt 5000 számtól legalább 100-zal, illetve legalább 200-zal eltér! Milyen becslést ad ezekre a valószínűségekre a centrális határeloszlástétel?

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $\leq j \leq 10\,000$ valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor ξ_j, $1 \leq j \leq 10\,000$ független valószínűségi változók, $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{1}{4}$, és a $P\left(\left|\sum_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)\right| > 100\right)$ és $P\left(\left|\sum_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)\right| > 200\right)$ valószínűségekre kell becslést adnunk. A Csebisev egyenlőtlenség az első valószínűségre a

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)\right| > 100\right) \leq \frac{10000 \cdot \operatorname{Var} \xi_1}{100^2} = \frac{1}{4},$$

a második valószínűségre pedig a

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{10000} (\xi_j - E\xi_j)\right| > 200\right) \leq \frac{10000 \cdot \operatorname{Var} \xi_1}{200^2} = \frac{1}{16}$$

első becslést adja.

A centrális határeloszlástétel szerint $P\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{10000}(\xi_j-E\xi_j)}{\sqrt{10000\cdot\frac14}}>u\right)\sim 1-\Phi(u)$. Innen kapjuk, hogy az első valószínűség kiszámításához az $u=\pm\frac{100}{\frac12\cdot 100}=\pm 2$ értékeket kell tekinteni, és a vizsgált valószínűség közelítőleg $(1-\Phi(2))+\Phi(-2)=2(1-\Phi(2))\sim 2(1-0.97720)=0.0456$. A második valószínűség hasonlóan körülbelül $2(1-\Phi(4))\sim 0$, (az első 4 tizedesjegy 0). (A Csebisev egyenlőtlenség 0.25 illetve 0.0625 felső becslést adta ezekre a valószínűségekre.)

37.) Egy szabályos dobókockát feldobunk 1200 alkalommal egymástól függetlenül, és összeadjuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 2280 és 2500 közé esik.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1\le j\le 1200$, valószínűségi változókat: $\xi_j=2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j=4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j=6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j=0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a $P\left(2280\le\sum\limits_{j=1}^{1200}\xi_j\le 2500\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Vegyük észre, hogy $E\xi_j=\frac16(2+4+6)=2$, $\operatorname{Var}\xi_j=\frac16(4+16+36)-4=\frac{16}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(2280\le\sum_{j=1}^{1200}\xi_j\le 2500\right)=P\left(\frac{-120}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}}\le\frac{\sum\limits_{j=1}^{1200}\xi_j-\sum\limits_{j=1}^{1200}E\xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{1200}\operatorname{Var}\xi_j}}\le\frac{100}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}}\right)$$
$$\sim\Phi(1.25)-\Phi(-1.5)=0.8944+0.9322-1=0.8266.$$

38.) Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is vesztünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, és η_j $1\le j\le 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j=2$, ha a j-ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j=4$, ha a j-ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j=6$, ha a j-ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j=0$, ha a j-ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j=1$, ha a j-ik érmedobás eredménye fej, és $\eta_j=0$, ha a j-ik érmedobás írás. Legyen $\zeta_j=\xi_j\eta_j$. Ekkor a j-ik dobásnál a nyereményünk

ζ_j lesz, $1 \le j \le 3300$, és a $P\left(3190 \le \sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független ζ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j = E\xi_j\eta_j = E\xi_j E\eta_j = \frac{1}{6}(2+4+6)\cdot\frac{1}{2} = 1$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36)\cdot\frac{1}{2} = \frac{14}{3}$, $\operatorname{Var}\zeta_j^2 = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \le \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum\limits_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3300} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{220}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}}\right)$$
$$\sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

39.) Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0,2]$ intervallumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke x-nél kisebb $\frac{x}{2}$-vel egyenlő, ha $0 \le x \le 2$, eggyel egyenlő, ha $x \ge 2$, és nulla, ha $x \le 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, amelyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, amelyek értéke nagyobb, mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megőrzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést egy normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 24\ 000$, valószínűségi változókat: $\xi_j = x$, ha a j-ik ledobott pont értéke x, és $0 \le x \le 1$, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik ledobott pont értéke az $(1,2]$ intervallumba esik. Ekkor a megőrzött pontok összege $S = \sum\limits_{j=1}^{24\ 000} \xi_j$, továbbá a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ezért a centrális határeloszástétel segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklő $P(5900 < S < 6075)$ valószínűségre. Ennek érdekében ki kell számolnunk a ξ_1 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

A ξ_1 valószínűségi változó várható értékének és szórásnégyzetének a kiszámolása érdekében vezessük be az η_1 valószínűségi változót, amelyik megegyezik az első ledobott pont értékével, és a következő $h(x)$ függvényt a $[0,2]$ intervallumon: Legyen $h(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $h(x) = 0$, ha $1 \le x \le 2$. Ekkor $\xi_1 = h(\eta_1)$, és η_1 sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, és $x > 2$. Innen $E\xi_1 = Eh(\xi_1) = \int h(x)\,dx = \int_0^1 x\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}$, $E\xi_1^2 = Eh(\eta_1)^2 = \int_0^1 x^2\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{6}$, és $\operatorname{Var}\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$. Ezért $ES = 6000$, $\operatorname{Var} S = 2500$. Innen

$$P(5900 < S < 6075) = P\left(-2 < \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < 1.5\right)$$
$$\sim \Phi(1.5) - \Phi(-2) = \Phi(1.5) + \Phi(2) - 1.$$

A feladat módosított megoldása: A ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét ki tudjuk számolni közvetlenül, az η valószínűségi változó bevezetése nélkül is, ha tudjuk, hogyan kell kiszámolni egy valószínűségi változó várható értékét kifejező integrált az általános esetben. (Tehát ki kell tudnunk számolni egy eloszlás által meghatározott Lebesgue–Stieltjes integrált akkor is, ha az eloszlásfüggvénynek nincs sűrűségfüggvénye, és nem is diszkrét eloszlás jelenik meg.) A következő észrevételt érdemes tenni. Ha adva van két μ_1 és μ_2 mérték és egy $f(x)$ függvény a számegyenesen, akkor $f(x)(\mu_1(\,dx) + \mu_2(\,dx)) = f(x)\mu_1(\,dx) + \int f(x)\mu_2(\,dx)$. (Valójában ez az azonosság tetszőleges téren értelmezett függvényre és mértékpárra is érvényes.)

Tekintsük a ξ valószínűségi változó μ_F eloszlásásának a következő természetes felbontását: $\mu_F = \mu_1 + \mu_2$, ahol μ_1 az a mérték, amelyiknek a sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2}$ a $[0,1]$ intervallumban, és nulla egyébként, azaz $\mu_1(A) = \int_{A\cap[0,1]} \frac{1}{2}\,dx$, a μ_2 mérték pedig a 0 pontba van koncentrálva, és a 0 pont μ_2 mértéke $\frac{1}{2}$, azaz $\mu_2(A) = \frac{1}{2}$, ha $0 \in A$, és $\mu_2(A) = 0$, ha $0 \notin A$. Ekkor $E\xi = \int x\mu_1(\,dx) + \int x\mu_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$, és $E\xi^2 = \int x^2\mu_1(\,dx) + \int x^2\mu_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx + 0 = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$, $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$.

40.) Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, amely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kell választanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum\limits_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\frac{3}{4}$, akkor $E\xi_j = \frac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{3}{16}$, $ES = 30\,000E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000\operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k-22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k-22\,500}{75}\right)$$
$$\sim 1 - \Phi\left(\frac{k-22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\frac{k-22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\frac{22\,500-k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\frac{22\,500-k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75\cdot 1.28$ és $p = \frac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75\cdot 1.28 = 22\,212$ és $p = \frac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge \frac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

41a.) Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\left(\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty u^2\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left[-u^2e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

41.) Legyen birtokunkban 100 lámpa, amelyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa élettartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk a 41a.) feladatban, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \frac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \frac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \frac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

42.) Legyen ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel, $0 < p \le 1$, azaz legyen $P(\xi = k+1) = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, \dots$. Számoljuk ki ξ várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Felírhatjuk, hogy

$$E\xi = \sum_{k=0}^\infty (k+1)(1-p)^k p = p\sum_{k=1}^\infty k(1-p)^{k-1},$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^\infty (k+1)^2(1-p)^k p = p\sum_{k=1}^\infty k^2(1-p)^{k-1},$$

és $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Ezen végtelen összegek kiszámításának érdekében deriváljuk kétszer a $\sum\limits_{k=0}^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, azonosságot. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^\infty kx^{k-1},$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^\infty k(k-1)x^{k-2}.$$

Innen $x=1-p$ helyettesítéssel $\frac{1}{p^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$, $E\xi=p\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$, $p\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p(1-p)\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2}+p\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=\frac{2(1-p)}{p^2}+\frac{1}{p}$, tehát $E\xi^2=\frac{2(1-p)}{p^2}+\frac{1}{p}$, $\operatorname{Var}\xi=\frac{2(1-p)}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1-p}{p^2}$.

43.) Vegyünk egy olyan pénzdarabot, amely $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az írás oldalra. Ezt a pénzdarabot annyiszor dobjuk fel, ameddig megjelenik 1200 fej dobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az elvégzett dobások száma 1680 1830 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést.

Megoldás: Az elvégzett dobások száma egy η negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó $n=1200$ és $p=\frac{2}{3}$ paraméterekkel, azaz $P(\eta=k+n)=\binom{n+k-1}{n-1}(1-p)^kp^n$, $p=\frac{2}{3}$, és $n=1200$ paraméterrel. Egy ilyen valószínűségi változónak ki lehet számolni a pontos eloszlását, azaz azt, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel. Elvileg, ez lehetőséget ad a kívánt valószínűség kiszámítására egy bonyolult összeg kiszámításának a segítségével. Ennél hasznosabb becslést tudunk kapni a következő érvelés segítségével, amely a kívánt valószínűséget jó pontossággal kiszámítja a centrális határeloszlástétel segítségével.

Jelölje ξ_j, $2\le j\le 1200$, a $j-1$-ik és j-ik fejdobás közötti dobások számát (a j-ik fejdobást beleszámítjuk a $j-1$-iket viszont nem számítjuk bele e dobások közé), és legyen ξ_1 az első fejdobásig (ezt is beleszámítva) elvégzett dobások száma. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, geometriai eloszlásúak $p=\frac{2}{3}$ paraméterel, és minket a $P(1680<\xi_1+\cdots+\xi_{1200}<1830)$ valószínűség érdekel. A 41. feladatban kiszámoltuk geometriai eloszlású valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $E\xi_j=\frac{1}{p}=\frac{3}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j=\frac{1-p}{p^2}=\frac{3}{4}$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $\eta=\xi_1+\cdots+\xi_{1200}$ jelöléssel minket a

$$P\left(-4<\frac{\eta-1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}}<1\right)$$

valószínűség érdekel. Erre azt kapjuk, hogy

$$P\left(-4<\frac{\eta-1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}}<1\right)\sim\Phi(1)+\Phi(4)-1\sim\Phi(1).$$

44.) Egy termék megvásárlásakor kapunk egy kupont. Összesen n különböző kupon létezik, és az egyes vásárlások során egymástól függetlenül $\frac{1}{n}$ valószínűséggel kapjuk meg valamelyik kupont. Egymás után sok alkalommal vásároljuk meg ezt a terméket. Jelölje $S_1=S_1^{(n)}$ azt a valószínűségi változót, hogy hanyadik vásárlásnál gyüjtöttük össze a kuponok felét, azaz $\frac{n}{2}$ különböző kupont, (legyen n páros szám), és $S_2=S_2^{(n)}$ azt a valószínűségi változót, hogy hanyadik vásárlásnál gyüjtöttük össze az összes kupont. Számoljuk ki $S_1=S_1^{(n)}$ és $S_2=S_2^{(n)}$ várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Jelölje U_1 azt, hogy hanyadik vásárlásnál kaptuk az első, U_2 azt, hogy hanyadik vásárlásnál kaptuk a második, és így tovább U_k azt, hogy hanyadik vásárlásnál kaptuk a k-ik kupont, $1 \le k \le n$. Ekkor a $\xi_k = U_k - U_{k-1}$, $1 \le k \le n$, (az $U_0 = 0$ jelöléssel) független geometriai eloszlású valószínűségi változók, és ξ_k eloszlásának a paramétere $p = \frac{n-k+1}{n}$. Továbbá $S_1^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n/2} \xi_k$, $S_2^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Ezért a 42. feladat eredménye alapján $ES_1^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n/2} \frac{n}{n-k+1} = n \sum\limits_{k=n/2+1}^{n} \frac{1}{k}$, $ES_2^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\operatorname{Var} S_1^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n/2} \frac{\frac{k-1}{n}}{\frac{(n-k+1)^2}{n^2}} = n \sum\limits_{k=1}^{n/2} \frac{k-1}{(n-k+1)^2}$, és

$$\operatorname{Var} S_2^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k-1}{n}}{\frac{(n-k+1)^2}{n^2}} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2}.$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $ES_1^{(n)} \sim n \int_{n/2}^{n} \frac{1}{x}\, dx = n \log 2$, míg $ES_2^{(n)} \sim n \log n$. Hasonlóan, $\operatorname{Var} S_1^{(n)} \sim n \int_0^{n/2} \frac{x}{(n-x)^2}\, dx = n \int_0^{1/2} \frac{t}{(1-t)^2}\, dt = \text{const.}\, n$. Másrészt $\operatorname{Var} S_2^{(n)}$ nagyságrendje n^2. Valóban, tekintve a $\operatorname{Var} S_2^{(n)}$-et definiáló összegnek a $k = n$ paraméterhez tartozó tagját kapjuk, hogy $\operatorname{Var} S_2^{(n)} \ge n(n-1)$. Továbbá $\operatorname{Var} S_2^{(n)} = n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(n-k+1)^2} \le n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{(n-k+1)^2} = n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \text{const.}\, n^2$.

45.) Hogyan tudunk a centrális határeloszlástétel segítségével egy olyan $[A_n, B_n]$ intervallumot definiálni, amelyre nagy n számra $P(S_1^{(n)} \in [A_n, B_n]) \sim 0.9$ a 44. feladatban definiált $S_1^{(n)}$ valószínűségi változóval? Mutassuk meg, hogy az $S_2^{(n)}$ valószínűségi változókra nem alkalmazható a centrális határeloszlástétel.

Megoldás: Láttuk a 44. feladat megoldásában, és az azt követő megjegyzésben, hogy $S_1^{(n)}$ felírható $\frac{n}{2}$ független valószínűségi változó összegeként, és a várható értéke $C_n = n \sum\limits_{k=n/2+1}^{n} \frac{1}{k}$, szórásnégyzete pedig

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_1^{(n)} &= n \sum_{k=1}^{n/2} \frac{k-1}{(n-k+1)^2} = n \sum_{k=1}^{n/2} \frac{\frac{k-1}{n}}{(1-\frac{k+1}{n})^2} n \sim n \int_0^{1/2} \frac{t}{(1-t)^2}\, dt \\ &= n \left(\left[\frac{1}{1-t} \right]_0^{1/2} + [\log(1-t)]_0^{1/2} \right) = (1 - \log 2) n.\end{aligned}$$

Ezért a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(-t \le \frac{S_1^{(n)} - C_n}{\sqrt{n(1-\log 2)}} \le t \right) \sim 2\Phi(t) - 1.$$

Válasszuk t-t, mint azt a számot, amelyre $\Phi(t) = 0.95$. A normális eloszlás táblázata alapján $t \sim 1.645$. Legyen $A_n = C_n - 1.645\sqrt{(1-\log 2)n}$, $B_n = C_n + 1.645\sqrt{(1-\log 2)n}$, ahol $C_n = n \sum\limits_{k=n/2+1}^{n} \frac{1}{k}$.

Meg kell még indokolni, hogy a centrális tétel alkalmazható ebben az esetben. A szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételre van szükségünk a $\xi_k^{(n)}$, $n = 2, 4, 6, \dots$, $1 \le k \le n$, szériasorozatra. Be lehet látni az előadáson független valószínűségi változók összegére tárgyalt érveléssel, hogy a centrális határeloszlástétel teljesül, ha az összeadandók valamely 2-nél nagyobb (például negyedik) momentumai nem túl nagyok. A 42. feladat számolása alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $E\xi_k^4 \le C_1$, ha $1 \le k \le \frac{n}{2}$ egy C_1 konstanssal, amely nem függ n-től. Másrészt $\operatorname{Var}\xi_k \ge C_2$ egy n-től független C_2 konstanssal, ha $\frac{n}{4} \le k \le \frac{n}{2}$. Ezek a relációk elegendőek a centrális határeloszástétel teljesüléséhez.

A 44. feladat utáni megjegyzésben láttuk, hogy $\operatorname{Var}\xi_n \ge \text{const.}\, n^2$, és $\operatorname{Var} S_2^{(n)} \le \text{const.}\, n^2$. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben a centrális határeloszlástételhez szükséges egyenletes kicsiség feltétele nem teljesül.

46.) Egy nagyvárosban népszavazást tartanak egy kérdésről. A város egy folyó két oldalán fekszik, és a folyó két oldalán lakóknál más mind a kérdés támogatottsága, mind a szavazási hajlandóság. A folyó baloldalán 85000 szavazópolgár lakik, az ottlakók $\frac{3}{4}$ valószínűséggel támogatják a javaslatot, és $\frac{4}{5}$ valószínűséggel mennek el szavazni. A folyó jobbpartján 50400 szavazópolgár lakik, az ottlakók $\frac{1}{2}$ valószínűséggel támgatják a javaslatot, és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel mennek el szavazni. Az egyes lakosok véleménye és szavazási hajlandósága független egymástól. Mi annak a (közelítő) valószínűsége, hogy a leadott igen szavazatok száma nagyobb, mint a leadott nem szavazatok kétszerese plusz 1080?

Megoldás. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 85000$ és η_j, $1 \le j \le 50400$, valószínűségi változokat. $\xi_j = 1$, ha a folyó j-ik baloldali partján lakó szavazópolgár igennel szavaz, $\xi_j = -2$, ha nemmel szavaz, és $\xi_j = 0$, ha nem megy el szavazni, $1 \le j \le 85000$. Hasonlóan, $\eta_j = 1$, ha a folyó j-ik jobboldali partján lakó szavazópolgár igennel szavaz, $\eta_j = -2$, ha nemmel szavaz, és $\eta_j = 0$, ha nem megy el szavazni, $1 \le j \le 50400$. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{85000} \xi_j + \sum\limits_{j=1}^{50400} \eta_j$. Vegyük észre, hogy minket a $P(S > 1080)$ valószínűség nagysága érdekel. (A ξ_j és η_j valószínűségi változókat hasonlóan definiáltuk. Azért tettünk közöttük különbséget, mert más az eloszlásuk.) Erre a valószínűségre a független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók összegére vonatkozó centrális határeloszlástétel segítségével tudunk jó közelítést adni. Ennek érdekében számoljuk ki az S összeg várható értékét és szórásnégyzetét.

Mivel $P(\xi_j = 1) = \frac{3}{5}$, $P(\xi_j = -1) = \frac{1}{5}$, $P(\xi_j = 0) = \frac{1}{5}$, ezért $E\xi_j = \frac{1}{5}$, $E\xi_j^2 = \frac{7}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{34}{25}$. Hasonlóan, $P(\eta_j = 1) = \frac{1}{3}$, $P(\eta_j = -1) = \frac{1}{3}$, $P(\eta_j = 0) = \frac{1}{3}$, ezért $E\eta_j = -\frac{1}{3}$, $E\eta_j^2 = \frac{5}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{14}{9}$. Ezért $ES = 85000 \times \frac{1}{5} - 50400 \times \frac{1}{3} = 200$, $\operatorname{Var} S = 85000 \times \frac{34}{25} + 50400 \times \frac{14}{9} = (20)^2(17^2 + 14^2) \sim 440^2$.

Innen $P(S > 1080) = P\left(\frac{S-ES}{\operatorname{Var} S} > \frac{1080-ES}{\operatorname{Var} S}\right) \sim= P\left(\frac{S-ES}{\operatorname{Var} S} > \frac{880}{440}\right) \sim 1 - \Phi(2) \sim 0.0228$.

47.) Egy népszavazási kérdést a választáson akkor fogadnak el, ha egyrészt többen szavaztak rá igennel, mint nemmel, másrészt az igen szavazatok száma meghaladja az összes választópolgárok számának a 20%-át. Legyen mondjuk, $n = 5000000$ választópolgár, mindenki egymástól függetlenül 40% valószínűséggel megy el szavazni, és 50% valószínűséggel szavaz igennel. Mi a valószínűsége annak, hogy a népszavazás eredményeként elfogadják a népszavazási kérdést?

Megoldás: Vezessük be a következő (kétváltozós) vektorértékű (ξ_j, η_j) valószínűségi változókat. $\xi_j = 1$, ha a j-ik szavazó igennel szavaz, $\xi_j = -1$, ha nemmel szavaz, és $\xi_j = 0$, ha nem megy el szavazni. $\eta_j = 1$, ha a j-ik szavazó igennel szavaz, $\eta_j = 0$ egyébként, tehát ha nemmel szavaz vagy ha nem megy el szavazni. Legyen $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j$. Ekkor minket annak a valószínűsége érdekel, hogy mind az $S_n > 0$ mind a $T_n > 0.2n$ esemény bekövetkezik. Erre a kérdésre a többváltozós centrális határeloszlástétel segítségével tudunk válaszolni, ha azt a (ξ_j, η_j) véletlen vektorok összegére alkalmazzuk. Ekkor $E\xi_j = 0$, $E\eta_j = 0.2$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 = 0.4$, $\operatorname{Var}\eta_j = E\eta_j^2 - (E\eta_j)^2 = 0.2 - 0.2^2 = 0.16$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \eta_j) = E\xi_j\eta_j - E\xi_j E\eta_j = E\xi_j\eta_j = P(\xi_j = 1, \eta_j = 1) = 0.2$. (A számolás utolsó lépésében kihasználtuk, hogy η_j két értéket vesz fel. Továbbá, ha $\eta_j = 0$, akkor $\xi_j\eta_j = 0$, és ha $\eta_j = 1$, akkor a ξ_j és η_j definiciója szerint $\xi_j = 1$.) Innen $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n > 0, T_n > 0.2n) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n > 0, \frac{1}{\sqrt{n}}(T_n - ET_n) > 0\right)$, és ez azon (X, Y) normális eloszlású véletlen vektor által meghatározott $P(X > 0, Y > 0$ valószínűséghez tart, amelyre $EX = EY = 0$, kovariancia mátrixát pedig a $\operatorname{Var} X = 0.4$, $\operatorname{Var} Y = 0.16$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0.2$ képletek határozzák meg.

Megjegyzés: Az ebben a feladatban kapott valószínűség valamivel nagyobb, mint 0.25, azaz az az érték, ami akkor jelenne meg, ha a határeloszlásban megjelenő normális eloszású véletlen vektor X és Y koordinátái korrelálatlanok, ezért függetlenek lennének. 0.25 annak az (aszimptotikus) valószínűsége, hogy legalább a szavazatok 40%-át leadták, és az igen szavazatok voltak többségben. De pozitív valószínűséggel az is bekövetkezhet, hogy az össz-szavazatok száma valamivel kevesebb, mint a szavazásra jogosultak számának 40%-a, de ezen belül a többségben levő igennel szavazók száma meghaladja a szavazásra jogosultak számának a 20%-át.

48.) Számoljuk ki az előző feladat megoldásában megjelenő határeloszlás sűrűségfüggvényét, azaz egy olyan normális eloszlású (ξ, η) véletlen vektor sűrűségfüggvényét, amelyre $E\xi = E\eta = 0$, $\operatorname{Var} X = 0.4$, $\operatorname{Var} Y = 0.16$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0.2$.

Megoldás: Számoljuk ki a tekintett véletlen vektor kovariancia mátrixának a determinánsát és inverzét. A determináns értéke $\operatorname{Var}\xi \operatorname{Var}\eta - (\operatorname{Cov}(\xi, \eta))^2 = 0.4 \cdot 0.16 - 0.2^2 = 0.024$, az inverz mátrix olyan $D = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ mátrix amelyre $A = \frac{0.16}{0.024} = \frac{160}{24} = \frac{20}{3}$, $C = \frac{0.4}{0.024} = \frac{50}{3}$, $B = -\frac{0.2}{0.024} = -\frac{25}{3}$. Innen a keresett sűrűségfüggvény értéke

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det D}} e^{-(Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy)/2} = \frac{\sqrt{15}}{50\pi} \exp\left\{-\frac{5}{3}(2x^2 + 5y^2 - 5xy)\right\}.$$

Innen az is következik, hogy az előző feladat megoldását megadó valószínűség közelítőleg $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dx\, dy$ a fenti $f(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel.

49.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó $E\xi^k$ k-ik momentumát minden $k = 0, 1, 2, \dots$, nem negatív egész számra.

Megoldás: $E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\,dx$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra. Mivel páratlan $\bar{k} = 2k + 1$ számokra a fenti integrál $x^{2k+1}\varphi(x)$ magfüggvénye páratlan, innen adódik, hogy $E\xi^{2k+1} = 0$. Páros indexekre a következő számolást végezhetjük el parciális integrálás segítségével.

$$\begin{aligned} E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} x e^{-x^2/2}\,dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{2k-1} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} e^{-x^2/2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} e^{-x^2/2} = (2k-1) E\xi^{2k-2}\,dx. \end{aligned}$$

Mivel $E\xi^0 = 1$ a fenti azonosságból kapjuk, hogy $E\xi^2 = 1$, $E\xi^4 = 3E\xi^2 = 3$, $E\xi^6 = 5E\xi^4 = 5 \cdot 3$, és teljes indukcióval $E\xi^{2k} = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdots 3 \cdot 1$.

50.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 2$ várható értékkel, és $d = 3$ szórásnégyzettel. Számoljuk ki az $E\xi^4$ várható értékét.

Megoldás: Írjuk a ξ valószínűségi változót $\xi = \sqrt{3}\eta + 2$ alakban, ahol η sztandard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\xi^4 = (\sqrt{3}\eta + 2)^4 = 9\eta^4 + 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\eta^3 + 6 \cdot 3 \cdot 4\eta^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 8\eta + 16$. Várható értéket véve, és felhasználva, hogy $E\eta = E\eta^3 = 0$ azt kapjuk, hogy $E\xi^4 = 9E\eta^4 + 72E\eta^2 + 16$. Mivel $E\eta^4 = 3$, $E\eta^2 = 1$ az előző feladat eredménye szerint $E\xi^4 = 115$.

51.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{j=1}^{n} \xi_j$ és $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$ összegek normalizáltjainak, azaz a $\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ és $\sqrt{\frac{180}{n}} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j^2 - \frac{1}{12}\right)$ valószínűségi változóknak az együttes eloszlása a két-dimenziós standard normális eloszláshoz konvergál, ha $n \to \infty$.

Megoldás: $E\xi = 0$, $E\xi^2 = \frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi^2 = E\xi^4 - (E\xi^2)^2 = \frac{1}{80} - \frac{1}{144} = \frac{1}{180}$. Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi, \xi^2) = E\xi^3 - E\xi E\xi^2 = 0$. Ezért a $\left(\sqrt{12}\xi_j, \sqrt{180}\left(\xi_j^2 - \frac{1}{12}\right)\right)$, $j = 1, 2, \dots$, véletlen vektorok függetlenek, nulla várható értékkel és az identitás kovariancia mátrix-szal. Innen, és a több-dimenziós centrális határeloszlástételből következik a feladat állítása.

52.) Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ n-változós normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek mindegyik eleme korrelálatlan. Ekkor $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, normális eloszlású valószínűségi változók.

Megoldás: Elég azzal az esettel foglalkozni, amikor a véletlen vektor nulla várható értékű. Azt használjuk fel, hogy egy nulla várható értékű normális eloszlású vektor eloszlását meghatározza a kovarianciamátrixa. Vegyünk független $\eta_1,\dots,\eta_n$ valószínűségi változókat, amelyekre $E\eta_j^2 = E\xi_j^2$, $E\eta_j = 0$ minden $1 \le j \le n$ indexre. Ekkor mivel $E\eta_j\eta_k = 0$, ha $j \ne k$ az η_j valószínűségi változók függetlensége miatt, az $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ és $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektorok kovariancia mátrixa megegyezik. Mind a két vektor normális eloszlású. Ezért eloszlásuk is megegyezik, így az $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ véletlen vektor koordinátáinak függetlenségéből következik a $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ vektor koordinátáinak függetlensége is.

53.) Mutassunk példát korrelálatlan, de nem független valószínűségi változókra.

Megoldás: Egy lehetséges példa a következő. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban, Ekkor a ξ és $\eta = \xi^2$ valószínűségi változók korrelálatlanok, de nem függetlenek. Valóban, $E\xi = 0$, $E\eta = E\xi^2 = \frac{1}{12}$, $E\xi\eta = E\xi^3 = 0$, $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = 0$. Másrészt ξ és η nem függetlenek, sőt az η valószínűségi változó a ξ valószínűségi változó determinisztikus függvénye. Egy lehetséges formális indoklása annak, hogy ξ és η nem független a következő: Legyen $0 < a < 1$ tetszőleges szám. Ekkor $\{\omega\colon\ \eta < a^2\} = \{\omega\colon\ |\xi| < a\}$. Ezért $P(\xi < a, \eta < a^2) = P(\xi < a)$, tehát $P(\xi < a, \eta < a^2) \ne P(\xi < a)P(\eta < a^2)$.

54.) Legyenek $\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\xi_n)$ n független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Tekintsük az összes $\eta = \sum\limits_{j=1} a_j\xi_j$ valószínűségi változót, ahol $a_1,\dots,a_n$ tetszőleges valós számok. Az így definiált valószínűségi változók egy $\mathcal{N}$ Euklideszi teret alkotnak, ha e tér két $\eta = \sum\limits_{j=1}^n a_j\xi_j \in \mathcal{N}$, $\bar\eta = \sum\limits_{j=1}^n \bar a_j\xi_j \in \mathcal{N}$, elemének az $A\eta + B\bar\eta$ lineáris kombinációját az $A\eta + B\bar\eta = \sum\limits_{j=1}^n (Aa_j + B\bar a_j)\xi_j)$ képlettel definiáljuk, a skalárszorzatot pedig az $(\eta,\bar\eta) = E\eta\bar\eta = \sum\limits_{j=1}^n a_j\bar a_j$ formulával. Ha $\eta_1,\dots,\eta_k$ k eleme a $\mathcal{N}$ Euklideszi térnek, ahol k tetszőleges pozitív egész szám, akkor az $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ véletlen vektor egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó. Ez úgy is interpretálható, hogy adva egy n-dimenziós $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ standard normális eloszlású véletlen vektor és egy (determinisztikus $k\times n$ méretű mátrix a $(\xi_1,\dots,\xi_n)A$ vektor normális eloszlású, azaz ez az állítás nemcsak négyzetes $n\times n$ méretű A mátrixokra igaz. Sőt igaz a következő kissé általánosabb állítás: Ha $(\xi_1,\dots,\xi_n$ n-változós normális eloszlású véletlen vektor, A $k\times n$-es mátrix, akkor $(\xi_1,\dots,\xi_k)A$ k-változós normális eloszlású vektor.

Megoldás: Az $\mathcal{N}$ tér a megadott összeadással és skalár számmal való szorzással lineáris tér, azaz teljesíti a kívánt azonosságokat. Az $(\eta,\bar\eta) = E\eta\bar\eta$ formulával definiált művelet tekinthető skalár szorzatnak, mert bilineáris függvény, és pozitív definit, azaz $(\eta,\eta) \ge 0$, és $(\eta,\eta) = 0$ csak az $\eta = 0$ esetben. Az $\mathcal{N}$ Euklideszi tér dimenziója n.

Azt kell belátni, hogy amennyiben $\eta_1,\dots,\eta_k$ mindegyike eleme az $\mathcal{N}$ térnek, akkor létezik k független, standard normális eloszlású valószínűségi változó úgy, hogy az $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ vektor koordinátái ezek lineáris függvényei. Ha $k \ge n$, akkor ez nyílvánvaló, mert tekinthetjük a $\xi_1,\dots,\xi_n$ vektorokat, illetve ezeket kiegészíthetjük még $k-n$ tőlük és egymástól független valószínűségi változóval. Mindegyik η_k vektor felírható ezen k vektor lineáris kombinációjaként. Valójában csak a ξ_j, $1 \le j \le n$, vektorok szerepelnek ezen lineáris kombinációkban nem zéró együtthatóval.

Ha $k < n$, tekintsük először azt a speciális esetet, amikor az $\eta_1, \dots, \eta_k$ valószínűségi változók korrelálatlanok, és egy szórásnégyzetűek. Ekkor e valószínűségi változók kiegészíthetőek egy $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ ortonormált bázissá az $\mathcal{N}$ térben. Az $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók függetlenek és standard normális eloszlásúak az 52.) feladat eredménye alapján.

Tekintsünk k, $k < n$ $\eta_1, \dots, \eta_k$ elemet az $\mathcal{N}$ térben. Vegyünk az általuk kifeszített altérben egy ortonormált bázist. Ennek elemei az előzőek alapján független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és az $\eta_1, \dots, \eta_k$ valószínűségi változók kifejezhetőek, mint ezek lineáris kombinációi. Mivel a bázis elemszáma kisebb, vagy egyenlő, mint k, innen következik, hogy $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ is normális eloszlású vektor.

Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ standard normális eloszlású véletlen vektor, akkor az előzőek alapján $(\xi_1, \dots, \xi_n)A$ is vektor normális eloszlású véletlen vektor. Ha $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ normális eloszlású véletlen vektor, akkor előállítható $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_n)B$ alakban, ahol $\eta_1, \dots, \eta_n$ standard normális eloszlású véletlen vektor. Ezért $(\xi_1, \dots, \xi_n)A = (\eta_1, \dots, \eta_n)BA$ is normális eloszlású.

55.) Érvényes az 52. feladat eredményének a következő általánosítása is. Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ n-változós normális eloszlású valószínűségi változó. Létezzen továbbá az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaznak egy olyan $L_1, \dots, L_p$ particiója, amelyre $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $j \in L_s$, $k \in L_{s'}$, $1 \le s, s' \le p$, és $s \ne s'$. Ekkor az $(\xi_j,\, j \in L_1)$, $(\xi_j, j \in L_2)$, $\dots$, $(\xi_j, j \in L_p)$ független, normális eloszlású véletlen vektorok.

Megoldás: Ez az 52. feladat megoldásához hasonlóan indokolható. Azt kell még meggondolni, hogy a $(\xi_j,\, j \in L_s)$, $1 \le s \le p$, független normális eloszlású véletlen vektorok egyesítése szintén normális eloszlású. Viszont ez egyszerűen következik az 52. feladat eredményéből. Ugyanis mindegyik $(\xi_j,\, j \in L_s)$ vektor előállítható $\eta_s B_s$ alakban alkalmas B_s mátrixokkal, ahol η_s, $1 \le s \le p$, standard normális eloszlású véletlen vektorok. Sőt, ezek az η_s vektorok választhatóak egymástól függetleneknek különböző s indexre, mint a $(\xi_j,\, j \in L_s)$ vektorok lineáris transzformációi.

56.) Adjunk példát olyan véletlen vektorra, amely nem normális eloszlású, noha koordinátái normális eloszlásúak. Konkrétabban, mutassuk meg, hogy a következő konstrukció jó példát ad erre.

Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezőt: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $[0,1]$-en, és P a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x) = \Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x) = \begin{cases} \xi(1-x) & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \xi\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Az ebben a példában definiált ξ és η valószínűségi változók normális eloszlásúak, de a (ξ, η) véletlen vektor nem normális eloszlású.

Megoldás: A ξ és η valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$P(\xi > x) = \lambda((\Phi(x), 1]) = 1 - \Phi(x)\ .$$

Az, hogy a (ξ, η) véletlen vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi + \eta = 0) = \frac{1}{2}$ azonosságból. Ugyanis, ha (ξ, η) normális eloszlású lenne, akkor az lenne a $\xi + \eta$ valószínűségi változó is. Ennek viszont ellentmond a $P(\xi + \eta = 0) = \frac{1}{2}$ reláció.

57.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és σ^2 szórással. Ekkor a $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ és az $S_n = \sum\limits_{j=1} (\xi_j - \bar{\xi})^2$ valószínűségi változók függetlenek egymástól. Továbbá $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{\xi} - m)$ standard normális eloszlású, $\frac{1}{\sigma} S_n$ pedig $n-1$ szabadságfokú χ^2 eloszlású valószínűségi változó. (Ez az eredmény magyarázza meg, hogy bizonyos statisztikai feladatokban miért jelenik meg az U-eloszlás, ami egy olyan standard normális és χ^2 eloszlású valószínűségi változó hányadosának az eloszlása, mely valószínűségi változók függetlenek egymástól.)

Megoldás: Tekintsük a $(\bar{\xi}, \xi_1 - \bar{\xi}, \dots, \xi_n - \bar{\xi})$ véletlen vektort. Ez az 52. feladat eredménye alapján egy $n+1$ dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Továbbá egyszerű számolás mutatja, hogy $\operatorname{Cov}(\bar{\xi}, \xi_j - \bar{\xi}) = \operatorname{Cov}(\bar{\xi}, \xi_j) - \operatorname{Var} \bar{\xi} = 0$ minden $1 \le j \le n$ indexre. Ezért a $(\bar{\xi}, \xi_1 - \bar{\xi}, \dots, \xi_n - \bar{\xi})$ véletlen vektor $D = (d_{i,j})$, $1 \le i, j \le n+1$, covariancia mátrixa felbomlik egy 1×1-es és $n \times n$-es mátrix direkt szorzatára, azaz $d_{1,j} = d_{j,1} = 0$, $2 \le j \le n+1$. Ezért a normális eloszlású vektorok tulajdonságaiból, (abból, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározza a véletlen vektor kovariancia mátrixa és várható érték vektora) következik, hogy $\bar{\xi}$ és $(\xi_1 - \bar{\xi}, \dots, \xi_n - \bar{\xi})$ függetlenek, továbbá normális eloszlásúak. Ezért a $\bar{\xi}$ és az $S_n = \sum\limits_{j=1} (\xi_j - \bar{\xi})^2$ valószínűségi változók függetlenek egymástól. Továbbá, mivel $E\bar{\xi} = m$, $\operatorname{Var} \bar{\xi} = \frac{\sigma^2}{n}$, ezért $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{\xi} - m)$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. A $\frac{1}{\sigma} S_n$ valószínűségi változó felírható, mint n (együttesen) normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszege. De ezek a valószínűségi változók nem függetlenek. Teljesül a $\sum\limits_{j=1}^{n} (\xi_j - \bar{\xi}) = 0$ azonosság.

Belátjuk, hogy S_n χ^2 eloszlású valószínűségi változó $n-1$ szabadságfokkal. Az indoklásban felhasználjuk azt a normális véletlen vektorokról szóló előadásban szereplő (a χ^2-próba vizsgálatában bizonyított) eredményt, amely szerint, ha $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ normális eloszlású véletlen vektor nulla várható értékkel és D kovariancia mátrixszal akkor $\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^2$ eloszlása megegyezik a $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a D kovariancia mátrix sajátértékei.

Ezért a feladat megoldásához elég belátni, hogy a $\frac{1}{\sigma}(\xi_1 - \bar{\xi}, \dots, \xi_n - \bar{\xi})$ véletlen vektor $D = (d_{i,j})$, $1 \le i, j \le n$, kovariancia mátrixának az 1 szám $n-1$ multiplicitású sajátértéke, és ezenkívül még a nulla (egyszeres) sajátértéke ennek a mátrixnak. A D mátrix elemei $d_{i,i} = 1 - \frac{1}{n}$, $d_{i,j} = -\frac{1}{n}$, $1 \le i, j \le n$. Ezért $D = I - A$, ahol I az identitás mátrix, $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} = \frac{1}{n}$, $1 \le i, j \le n$, mátrix. Az A mátrixnak 1 darab 1 sajátértékű sajátvektora van, (az $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ vektor), és $n-1$ nulla sajátértékű vektora. (Az $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ vektort kiegészítjük tetszőleges módon egy ortonormált bázissá, és ilyen módon az R^n tér egy az A mátrix sajátvektoraiból álló bázisát kapjuk, és e sajátvektorok sajátértékei a $\lambda_1 = 1$, és $\lambda_j = 0$, $2 \le j \le n$.) Innen következik, hogy a D mátrix sajátértékei az $1 - \lambda_j$ számok, $1 \le j \le n$, azaz 1 darab 0 és $n-1$ darab 1-es.

58.) Legyenek $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_6^{(j)})$ független, $1 \le j \le n$, egyforma eloszlású véletlen vektorok $P(\xi_k^{(j)} = 1) = \frac{1}{6}$, minden $1 \le k \le 6$, $1 \le j \le n$ indexre, és $\xi_{k'}^{(j)} = 0$, ha $k' \ne k$, és $\xi_k^{(j)} = 1$, minden $1 \le k, k' \le 6$ indexre. Legyen $S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ e véletlen vektorok normalizált összege. Ekkor a $\xi^{(j)}$ és S vektorok kovariancia mátrixa az a $D = (d_{i,k})$, $1 \le i, k \le 6$, mátrix, amelyre $d_{i,k} = -\frac{1}{36}$, ha $i \ne k$, $d_{k,k} = \frac{5}{36}$. A D mátrix nem invertálható.

Megoldás: A $\xi^{(j)}$ vektor D mátrixának elemei $d_{i,k} = E\xi_i^{(j)}\xi_k^{(j)} - E\xi_i^{(j)}E\xi_k^{(j)} = -E\xi_i^{(j)}E\xi_k^{(j)} = -\frac{1}{36}$,ha $i \ne k$, és $d_{k,k} = E(\xi_k^{(j)})^2 - (E\xi_k^{(j)})^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$. Az S véletlen vektor kovariancia mátrixa ugyanez a D mátrix. A D mátrix nem invertálható, mert a sorösszegei nullával egyenlőek.

59.) Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki az $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

A megoldás kidolgozása előtt tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó ξ és η, amelyek (együttes) sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v) = g_x(u,v)$ függvényt, amely a síkon az $\left\{(u,v)\colon \frac{v}{u} < x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v) = 1$, ha $\frac{v}{u} < x$, és $g(u,v) = 0$, ha $\frac{v}{u} \ge x$. Ekkor $P\left(\frac{\eta}{\xi} < x\right) = Eg(\xi,\eta) = \int\int g(u,v) f(u,v)\,du\,dv = \int\int_{\{(u,v)\colon\, \frac{v}{u} < x\}} f(u,v)\,du\,dv$. Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

Megoldás. A feladatban vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P\left(\frac{\eta}{\xi} < x\right) = \iint_{\{(u,v)\colon\, v < xu\}} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv$$
$$= 2\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \arctan x} \int_0^\infty r e^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan x} d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az r Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső r változó szerinti integrál $\int_0^\infty r e^{-r^2/2}\,dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty = 1$.

Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

Második megoldás. A (ξ, η) vektor sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ, η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\frac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{\eta}{\xi} < x\right) &= P\left((\xi, \eta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \arctan x\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \arctan x + \pi\right) \text{szögtartományban}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.
\end{aligned}
$$

60.) Legyen (ξ, η) két-dimenziós valószínűségi változó $f(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be, hogy a $\frac{\eta}{\xi}$ valószínűségi változónak is létezik sűrűségfüggvénye, és az a $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, tx)|x|\,dx$ függvény. Adjunk ennek az eredménynek a segítségével új megoldást az előző feladatra.

Megoldás: Jelölje $G(t)$ a $\frac{\eta}{\xi}$ tört $G(t) = P\left(\frac{\eta}{\xi} < t\right)$ eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$
G(t) = \int_{(x,y)\colon\, \frac{y}{x} < t} f(x, y)\,dx\,dy.
$$

Számítsuk ki ezt az integrált az $(\bar{x}, z) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$ helyettesítéssel. Ekkor a $G(t)$ függvényt kifejező integrálban az új integrálási tartomány az $\{(\bar{x}, z)\colon -\infty < \bar{x} < \infty, -\infty < z < t\}$, $f(x, y) = f(\bar{x}, z\bar{x})$, és az integráltranszformáció kiszámításához meg kell határoznunk a leképezés Jacobi transzformációját. Ez az $\bar{x} = h_1(x, y) = x$, $z = h_2(x, y) = \frac{y}{x}$ jelöléssel

$$
J(\bar{x}, z) = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, & \frac{\partial \bar{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{z}{\partial y}, \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x}, & \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}, & \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y}, \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{y}{x^2}, & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|,
$$

és informálisan $d\bar{x}\,dz = J(x, z)\,dx\,dy$, ahonnan $dx\,dy = \frac{1}{J(x,z)}\,d\bar{x}\,dz = |\bar{x}|\,d\bar{x}\,dz$, ahonnan

$$
G(t) = \int_{(x,y)\colon\, \frac{y}{x} < t} f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_{(x,z)\colon z<t} f(x, zx)|x|\,dx\,dz = \int_{-\infty}^{t} K(z)\,dz,
$$

ahol

$$
K(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, xz)|x|\,dx.
$$

Innen látható, hogy a keresett sűrűségfüggvény $g(t) = K(t)$, amint állítottuk.

Ha ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor (ξ, η) sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$, ezért $\frac{\eta}{\xi}$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+t^2x^2)/2} |x| \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi(t^2+1)} e^{-(\sqrt{(t^2+1)}x)^2/2} \left| \left(\sqrt{(t^2+1)}x\right) \right| \, d\left(\sqrt{(t^2+1)}x\right), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi(t^2+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} |x| \, dx = \frac{1}{\pi(t^2+1)} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi(t^2+1)} \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(t^2+1)}. \end{aligned}$$

61.) Legyen ξ és η két valószínűségi változó, amelyek együttes eloszlásának (létező) sűrűségfüggvénye $f(u,v) = \frac{2}{3}u + 2uv^2 + \frac{2}{3}v$ alakú, ha $0 \leq u, v \leq 1$, és $f(u,v) = 0$ egyébként. Lássuk be először, hogy $f(u,v)$ valóban sűrűségfüggvény, majd számoljuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Annak érdekében, hogy ellenőrizzük, hogy $f(u,v)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatni, hogy $f(u,v) \geq 0$ (majdnem) minden (u,v) számpárra, és

$$\int \int f(u,v) \, du \, dv = 1.$$

Az nyilvánvaló, hogy $f(u,v) \geq 0$ minden (u,v) számpárra. Másrészt mivel

$$\int_0^1 \int_0^1 uv^2 \, du \, dv = \int_0^1 u \, du \int_0^1 v^2 \, dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$\int_0^1 \int_0^1 u \, du \, dv = \frac{1}{2}$ és $\int_0^1 \int_0^1 v \, du \, dv = \frac{1}{2}$, ezért $\int \int f(u,v) \, du \, dv = 1$.
A $\xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f(u,v) \, dv \right) du$$

képlet segítségével számíthatuk ki, hasonlóan $1 - G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{x-u}^{\infty} f(u,v) \, dv \right) du$. Másrészt, a sűrűségfüggvény $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ formula segítségével kiszámítható. Ez a mi esetünkben a következőt jelenti, $g(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $g(x) = 1$, ha $x \geq 2$, mert $G(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $G(x) = 1$, ha $x \geq 2$. Másrészt

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \int_0^{x-u} \left(\frac{2}{3}u + 2uv^2 + \frac{2}{3}v \right) du \right) dv,$$

ha $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 \int_{x-u}^1 \left(\frac{2}{3}u + 2uv^2 + \frac{2}{3}v\right) du\right) dv$, ha $1 \leq x \leq 2$. Azért volt érdemes a $0 \leq x \leq 1$ és $1 \leq x \leq 2$ eseteket szétválasztani, mert a konkrét feladatban a $G(x)$ függvényt tudjuk kényelmesen kiszámítani $0 \leq x \leq 1$ és az $1 - G(x)$ függvényt az $1 \leq x \leq 2$ intervallumban. Ez a szétbontás azonban nem kötelező.

A fent vázolt módon ki lehet számolni a sűrűségfüggvényt, de valójában ezt a számolást lehet egyszerűsíteni. Ez hasonló ahhoz, ahogy a konvolució formulát vezetik le független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényére. Valóban, a v változó $z = u + v$ helyettesítésével felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f(u,v)\,dv \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f(u, z-u)\,dz \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u, z-u)\,du \right) dz, \end{aligned}$$

ahonnan deriválással

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, x-u)\,du.$$

E képlettel a számolásokat lehet egyszerűsíteni. Azt kapjuk, hogy jelen esetben $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$, (ebben az esetben a $g(x)$ függvényt kifejező integrálban szereplő integrandus azonosan nulla. Ugyanis $x < 0$ esetében vagy $u < 0$ vagy $x - u < 0$, és $x > 2$ esetben vagy $u > 1$ vagy $x - u > 1$. Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor

$$g(x) = \int_0^{1-x} \left(\frac{2}{3}u + 2u(x-u)^2 + \frac{2}{3}(x-u) \right) du,$$

ha $1 \leq x \leq 2$, akkor

$$g(x) = \int_{x-1}^{1} \left(\frac{2}{3}u + 2u(x-u)^2 + \frac{2}{3}(x-u) \right) du.$$

61a.) Mutassuk meg, hogy a fenti feladat megoldásában kapott részeredmények tartalmazzák speciálisan azt az eredményt is, hogy két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét konvolució segítségével lehet kiszámolni.

Megoldás. Láttuk, hogy amennyiben egy (ξ, η) véletlen vektor sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor a $\xi + \eta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, és az $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, x-u)\,du$. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $h_1(x)$ és $h_2(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a (ξ, η) vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(x, y) = h_1(x)h_2(y)$ függvény. Így a $\xi + \eta$ összegnek is van sűrűségfüggvénye, és az az idézett eredmény szerint $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, x-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(x-u)\,du$.

62.) Legyen a (ξ, η) vektor egyenletes eloszlású a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$ pontok által meghatározott háromszögön, azaz legyen sűrűségfüggvénye 2 azon a háromszögön, amelynek ezek a pontok a csúcspontjai, és legyen nulla ezen a háromszögön kívül. Számítsuk ki a ξ és η valószínűségi változók kovarianciáját.

Megoldás: $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, és $E\xi\eta = \int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi = \int xf(x,y)\,dx\,dy$, $E\eta = \int yf(x,y)\,dx\,dy$, ahol $f(x,y)$ a (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye. Ezért

$$E\xi\eta = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2xy\,dy\right) dx = \int_0^1 2x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$E\xi = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\,dy\right) dx = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \frac{1}{3},$$

és

$$E\eta = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2y\,dy\right) dx = \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3},$$

(Szimmetria meggondolások alapján is belátható, hogy $E\eta = E\xi$.) Innen $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36}$.

63.) Egy kártyacsomag 75 kártyalapot tartalmaz, amelyek mindegyike az 1 és 75 közötti számok valamelyikével meg van számozva. Kihúzunk 40 kártyát úgy, hogy húzás után visszatesszük, és ezenkívül a kártyacsomagba teszünk még egy új, minden korábbi kártyától különböző kártyalapot. Jelölje X azt, hogy hány különböző kártyalapot húztunk ki. Számoljuk ki az EX várható értéket.

Megoldás: Számozzuk meg a kártyacsomagban kezdettől fogva tartalmazott kártyalapokat 1-től 75-ig, és vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 75$, valószínűségi változókat. $\xi_j = 1$, ha a j-ik kártyát kihúztuk, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kártyát nem hútuk ki a 40 húzás során. Ezenkívül vezessük be a következő η_j, $1 \le j \le 40$, valószínűségi változókat is. $\eta_j = 1$, ha a j-ik húzás után a kártyacsomagba tett lapot később kihúztuk, és $\eta_j = 0$, ha nem húztuk ki. Ekkor $X = \sum\limits_{j=1}^{75} \xi_j + \sum\limits_{j=1}^{40} \eta_j$. Ezért $EX = \sum\limits_{j=1}^{75} E\xi_j + \sum\limits_{j=1}^{40} E\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{75} P(\xi_j = 1) + \sum\limits_{j=1}^{40} P(\eta_j = 1)$. Annak a valószínűsége, hogy a j-ik (a csomagban eredetileg bennelevő) kártyát nem húzzuk ki 40 húzás során $\prod\limits_{j=1}^{40} \frac{74+j-1}{75+j-1}$. Innen $P(\xi_j = 1) = 1 - \prod\limits_{j=1}^{40} \frac{74+j-1}{75+j-1}$, $1 \le j \le 75$. Annak a valószínűsége, hogy a j-ik húzás után a kártyacsomagba tett kártyát nem húzzuk ki, $\prod\limits_{l=j+1}^{40} \frac{74+l-1}{75+l-1}$. Ezért $E\eta_j = 1 - \prod\limits_{l=j+1}^{40} \frac{74+l-1}{75+l-1}$, ha $1 \le j \le 39$, és $E\eta_{40} = 0$. Innen kapjuk, hogy

$$EX = 75\left(1 - \prod_{j=1}^{40} \frac{74+j-1}{75+j-1}\right) + \sum_{l=1}^{39}\left[1 - \prod_{l=j+1}^{40} \frac{74+l-1}{75+l-1}\right].$$

64.) Egy kártyacsomag 75 kártyalapot tartalmaz, amelyek mindegyike az 1 és 75 közötti számok valamelyikével meg van számozva. Kihúzunk 40 kártyát úgy, hogy a páratlan indexű húzások után a kártyát visszatesszük, a páros indexű húzások után pedig nem tesszük vissza a csomagba. Jelölje X azt, hogy hány különböző kártyalapot húztunk ki. Számoljuk ki az EX várható értéket.

Megoldás: Számozzuk meg a kártyacsomag lapjait 1-től 75-ig, és vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 75$, valószínűségi változókat. $\xi_j = 1$, ha a j-ik kártyát kihúztuk, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kártyát nem húztuk ki a 40 húzás során. Ekkor $X = \sum\limits_{j=1}^{75} \xi_j$, ezért $EX = \sum\limits_{j=1}^{75} E\xi_j = \sum\limits_{j=1}^{75} P(\xi_j = 1)$. Annak a valószínűsége, hogy a j-ik kártyát nem húzzuk ki 40 húzás során $\prod\limits_{j=1}^{20} \left(\frac{74-j+1}{75-j+1}\right)^2$. Innen $P(\xi_j = 1) = 1 - \prod\limits_{j=1}^{20} \left(\frac{74-j+1}{75-j+1}\right)^2$, és $EX = 75\left(1 - \prod\limits_{j=1}^{20} \left(\frac{74-j+1}{75-j+1}\right)^2\right)$.

65.) Két független standard normális eloszlású valószínűségi változó hányadosa, mint láttuk, egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $h(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < x < \infty$. Az ilyen sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változókat Cauchy eloszlásúnak nevezik. Létezik-e egy Cauchy eloszlású valószínűségi változónak várható értéke?

Megoldás. A válasz az, hogy egy Cauchy eloszlású ξ valószínűségi változónak nem létezik várható értéke. Egy ξ valószínűségi változónak ugyanis akkor és csak akkor létezik várható értéke, ha mind a $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ pozitív, mind az $\xi^- = \min(0, \xi)$ negatív részének a várható értéke véges. Ez azonban ebben a példában nem teljesül, mert $E\xi^+ = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \infty$ és $E\xi^- = \int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx = -\infty$. Az első relációt például úgy lehet látni, hogy észrevesszük, hogy az $xf(x) = \frac{x}{\pi(1+x^2)}$ integrandus primitív függvénye a $g(x) = \frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)$, és $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. De egyszerűbben is láthatjuk ezt, ha észrevesszük, hogy az $xf(x)$ függvény a végtelenben úgy viselkedik, mint a const. x^{-1} függvény alkalmas pozitív konstanssal, ezért a tekintett integrál konvergenciája vagy divergenciája attól függ, hogy az $\int_a^\infty x^{-1}\,dx$ integrál valamely $a > 0$ alsó integrálási határral konvergens-e vagy divergens. De tudjuk, hogy az $\int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx$ integrál $\alpha > 1$-re konvergens, és $\alpha \le 1$-re divergens.

66.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban, azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként, η exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $g(x) = e^{-x}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $h(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: $h(x) = \int_{-\infty}^\infty f(u)g(x-u)\,du$. Határozzuk meg, hogy mely u értékekre lesz a fenti integrál $f(u)g(x-u)$ integrandusa szigorúan pozitív. Ehhez az kell, hogy $0 \le u \le 1$, és $x - u \ge 0$, azaz $u \le x$. A két követelményt egy képletben egyesítve azt írhatjuk, hogy $0 \le u \le \min(x, 1)$. Innen következik, hogy $h(x) = 0$, ha $x \le 0$, $h(x) = \int_0^x e^{-(x-u)}\,du = e^{-x}[e^u]_0^x = e^{-x}(e^x - 1) = 1 - e^{-x}$, ha $0 \le x \le 1$, és $h(x) = \int_0^1 e^{-(x-u)}\,du = e^{-x}(e-1)$, ha $x > 1$.

67.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1,1]$ intervallumon, η egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-2,2]$ intervallumban, és legyen ξ és η független egymástól. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként a ξ valószínűségi változó, $g(x) = \frac{1}{4}$, ha $-2 \le x \le 2$, $g(x) = 0$ egyébként az η valószínűségi változó, és $h(x)$ a $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ekkor $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$. Határozzuk meg, hogy mely u értékekre lesz a fenti integrál $f(u)g(x-u)$ integrandusa szigorúan pozitív. Ehhez az kell, hogy $-1 \le u \le 1$, és $-2 \le x-u \le 2$, azaz $x-2 \le u \le x+2$. Ha $x > 0$, akkor ez azt jelenti, hogy $\min(x-2,-1) \le u \le 1$. Innen $-1 \le u \le 1$, ha $0 \le x \le 1$, továbbá $x-2 \le u \le 1$, ha $1 \le x \le 3$, és a tekintett halmaz üres, ha $x > 2$. Ezért $h(x) = 0$, ha $x > 3$, $h(x) = \frac{1}{8}\int_{x-2}^{1} du = \frac{3-x}{8}$, ha $1 \le x \le 3$, és $h(x) = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} du = \frac{1}{4}$, ha $0 \le x \le 1$. Mivel mind $f(x)$ mind $g(x)$ páros függvény, ugyanez igaz a $h(x)$ függvényre is, azaz $h(x) = h(-x)$. Innen $h(x) = \frac{1}{4}$, ha $-1 \le x \le 1$, $h(x) = \frac{3-x}{8}$, ha $1 \le |x| \le 3$, és $h(x) = 0$, ha $|x| \ge 3$.

68.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,2]$ intervallumon, η egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $[1,5]$ intervallumban, és legyen ξ és η független egymástól. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A feladat megoldható az előző feladathoz hasonló módon kissé bonyolultabb számolással. De egyszerűbb azt közvetlenül visszavezetni az előző feladatra. Ennek érdekében vegyük észre, hogy a $\bar{\xi} = \xi - 1$ és $\bar{\eta} = \eta - 3$ valószínűségi változók teljesítik az előző feladat feltételeit. Ezért a $\xi+\eta = \bar{\xi}+\bar{\eta}+4$ összeg $\tilde{h}(x)$ sűrűségfüggvénye teljesíti a $\tilde{h}(x) = h(x-4)$ azonosságot, ahol $h(x)$ az előző feladatban tekintett véletlen összeg sűrűségfüggvénye. Innen $\tilde{h}(x) = \frac{1}{4}$, ha $-1 \le x-4 \le 1$, $\tilde{h}(x) = \frac{3-x}{8}$, ha $1 \le |x-4| \le 3$, és $\tilde{h}(x) = 0$, ha $|x-4| \ge 3$.

69.) Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk: Feldobnak egy szabályos pénzdarabot egymástól függetlenül egymás után. Amennyiben fej a dobás eredménye, akkor a feltett tét dupláját kapjuk, ha írás, akkor a tét $\frac{2}{3}$ részét elveszítjük, és csak $\frac{1}{3}$ részét őrizhetjük meg. Mivel ez a játék előnyös, ezért feltesszük minden játékban minden pénzünket. Lássuk be, hogy amennyiben A volt a vagyonunk a játék kezdete előtt, és Z_n jelöli vagyonunkat az n-ik játék után, akkor

a) $EZ_n = A\left(\frac{7}{6}\right)^n$, azaz vagyonunk várható értéke exponenciálisan nő.

b) Z_n egy valószínűséggel nullához tart, azaz ha sokáig játszunk, akkor közel egy valószínűséggel majdnem minden pénzünket elveszítjük.

c) Értsük meg, hogy ez a két állítás nem mond egymásnak ellent.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = \frac{1}{3}$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor $\xi_1, \xi_2, \dots$, független valószínűségi változók, $P(\xi_j = 2) = P\left(\xi_j = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, és ezenkívül nyereményünk az n-ik játék után $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$. Ezért $E\xi_j = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}$, és $EZ_n = EA\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = AE\xi_1E\xi_2\cdots E\xi_n = A\left(\frac{7}{6}\right)^n$. Ez a feladat a) állítása.

A $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ relációból következik, hogy $\frac{1}{n}\log Z_n = \frac{\log A}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$. Továbbá, $E\log\xi_j = \frac{1}{2}\left(\log 2 + \log\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$. Ezért a nagy számok (erős) törvénye szerint $\frac{1}{n}\log Z_n$ egy valószínűséggel konvergál a negatív $-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ számhoz. Innen következik, hogy 1 valószínűséggel $\lim\limits_{n\to\infty}\log Z_n = -\infty$, és ezért $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$.

Az a) rész bizonyítása azon alapult, hogy $E\xi_j > 1$, a b) részé pedig azon, hogy $E\log\xi_j < 0$. Ez a két egyenlőtlenség teljesülhet egyszerre, mert a várható érték és a logaritmusképzés egymással nem felcserélhető. Igaz az $Ee^\eta \ge e^{E\eta}$ egyenlőtlenség (ez a konvex függvényekre vonatkozó úgynevezett Jensen egyenlőtlenség speciális esete), ahonnan $\xi = \log\eta$ választással $E\xi \ge e^{\log E\xi}$, de egyenlőség nem írható a fenti egyenlőtlenség helyett. Megjegyzem, hogy hasonló, de egyszerűbben érthető példát mutat a feladat a) és b) állításának egyszerre való teljesülésére a következő modell. Olyan játékot játszunk, amelyben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elveszítjük, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig megháromszorozzuk a pénzünket. Az egyes játékok egymástól függetlenek, és minden időpontban minden pénzünket feltesszük. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az n-ik játék után minden pénzünket elveszítjük, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami rendkívül gyorsan tart egyhez, és pénzünk várható értéke $3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami exponenciálisan gyorsan nő az n függvényében. Hasonló, csak kissé rejtettebb jelenség történik az általunk tárgyalt feladatban is. Tekintsük a feladatban vizsgált játék nyereményét sok játék után. Azt állíthatjuk, hogy nagy n indexre az n-ik játék után nagy valószínűséggel alig marad pénzünk. Viszont kis valószínűséggel nagyon sok pénzt nyerünk, és ezért nyereményünk várható értéke nagy. Ez az oka annak, hogy nemcsak a b), hanem az a) állítás is teljesül.

A feladatban tárgyalt modell egyben olyan példát is ad, amelyben a Lebesgue tétel állítása nem érvényes, mert nem teljesülnek a Lebesgue tétel feltételei. Ebben a modellben a nyereményünk értéke 1 valószínűséggel nullához tart, a várható értéke (azaz a nyeremény értékének a P valószínűségi mérték szerinti integrálja) viszont nem a határérték integráljához, azaz nullához, hanem végtelenhez konvergál.

70.) Tekintsük a 69. feladatban tárgyalt játékot, azzal a különbséggel, hogy óvatosabban játszunk. A játék minden egyes fordulójában vagyonunk u-ad részét, $0 \le u \le 1$, tesszük fel tétként. Jelölje $Z_n(u)$ vagyonunkat a játék n-ik lépése után. Ekkor az $\frac{1}{n}\log Z_n(u)$ valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergálnak egy $B(u)$ számhoz. Határozzuk meg a legjobb $\bar{u}$ számot, amelyre $B(\bar{u}) = \sup\limits_{0\le u\le 1} B(u)$. Lássuk be, hogy $B(\bar{u}) > 0$, ami azt jelenti, hogy nyereményünk exponenciálisan nő 1 valószínűséggel.

Megoldás: Vezessük be a $\xi_j = \xi_j(u)$, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_j = 1 + u$, ha a j-ik dobás eredménye fej, és $\xi_j = \xi_j(u) = 1 - \frac{2u}{3}$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor az n-ik lépésben a vagyonunk $Z_n = A\xi_1\cdots\xi_n$, a ξ_j, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, ezért $\frac{1}{n}\log Z_n = \frac{\log A}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$, és a nagy számok erős törvénye szerint az $\frac{1}{n}\log Z_n$ valószínűségi változók 1 valószínűséggel konvergálnak a $B(u) = E\log\xi_1 =$

$\frac{1}{2}\left(\log(1+u)+\log\left(1-\frac{2u}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\log(1+u)\left(1-\frac{2u}{3}\right)$ számhoz. A $B(u)$ függvény a maximumát az $\bar{u}=\frac{1}{4}$ helyen veszi fel, és $B(\bar{u})=\frac{1}{2}\log\frac{25}{24}>0$.

71.) Tegyük fel, hogy olyan játékot játszhatunk, amelynek n-ik fordulóbeli nyereménye A forint tét feltétele esetén $A\xi_n$ forint, ahol $\xi_1,\dots,\xi_n,\dots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre, $E\xi_1>1$. Legyen 1 forintunk az első forduló előtt. Van olyan ezt a feltételt teljesítő modell, amelyre abban az esetben, ha merészen játszunk, azaz ha minden fordulóban feltesszük a teljes vagyonunkat, akkor a vagyonunk nullához tart $n\to\infty$ esetén. Viszont ha minden fordulóban a vagyonunk u-ad részét tesszük fel valamely alkalmas $0<u<1$ számmal, akkor elérhető. hogy vagyonunk értéke exponenciálisan nőjön $n\to\infty$ esetén, azaz létezzen olyan $B(u)>1$ szám, amelyre az n forduló utáni vagyonunk $B(n)$ értékére $\lim\limits_{n\to\infty}B_n^{1/n}=B(u)$ egy valószínűséggel.

Megoldás: A 70. feladatban megadtunk egy olyan modellt, amelyben merész játék esetén nyereményünk értéke nullához tart $n\to\infty$ esetén. Másrészt, ha vagyonunk u-ad-részét tesszük fel minden fordulóban, és X_n jelöli vagyonunkat az n-ik forduló után, akkor $X_{n+1}=(1-u)X_n+uX_n\xi_n=X_n\eta_n$, ahol $\eta_n=\eta_n(u)=1-u+u\xi_n$. Innnen $X_{n+1}=\prod\limits_{j=1}^{n}\eta_j$, és a nagy számok törvénye szerint $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log X_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\eta_j=E\log\eta_1$ egy valószínűséggel. Ezért elég belátni, hogy $E\log\eta_1(u)>0$ alkalmas $0<u<1$ számra. Viszont az $f(u)=E\log\eta_1(u)$ függvényre $f(0)=0$, és deriváltjára $f'(0)=E\frac{\xi_1-1}{1+u(\xi_n-1)}\Big|_{u=0}=E\xi_1-1>0$. Ez azt jelenti, hogy $f(u)>0$ minden elég kis $u>0$ számra. Innen következik a feladat állítása.

72.) Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, (egyforma eloszlású) valószínűségi változók egyenletes eloszlással valamely $[a,b]$ intervallumon. Vegyük e valószínűségi változók $\xi_1^*<\xi_2^*<\cdots<\xi_n^*$ nagyság szerinti sorbarendezését, azaz a belőlük készített rendezett mintát. A $(\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*)$ véletlen vektor (létező) $g(x_1,\dots,x_k)$ sűrűségfüggvényét az alábbi képlet adja meg: $g(x_1,\dots,x_k)=\frac{n!}{(b-a)^n}$, ha $a\le x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, és $g(x_1,\dots,x_n)=0$ egyébként.

Megoldás: Azt kell belátni, hogy az n-dimenziós tér tetszőleges $C\subset R^n$ (mérhető) részhalmazára

$$P((\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*)\in C)=\int_C g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n.$$

Elég ezt az azonosságot a $C\subset A$, $A=\{(x_1,\dots,x_n)\colon\ a<x_1<x_2,\dots<x_n<b\}$ alakú halmazokra belátni a $g(x_1,\dots,x_n)=\frac{n!}{(b-a)^n}$ függvénnyel, mert $C\in R^n\setminus A$ esetén mind $P((\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*)\in C)=0$, mind $\int_C g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=0$. Adva egy $C\subset A$ (mérhető) halmaz, vezessük be az $\{1,\dots,n\}$ halmaz $\pi\in\Pi_n$ permutációinak a halmazát, és legyen

$$C_\pi=\{(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})\colon\ (x_1,\dots,x_n)\in C,\}$$

minden $\pi \in \Pi_n$ permutációra és $C \subset A$ halmazra. Definiáljuk a $\bar{C} = \bigcup_{\pi \in \Pi_n} C_\pi$ halmazt. Ekkor

$$\{\omega\colon\ (\xi_1^*(\omega), \xi_2^*(\omega), \dots, \xi_n^*(\omega)) \in C\} = \{\omega\colon\ (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n)(\omega)) \in \bar{C}\},$$

a C_π halmazok diszjunktak különböző π permutációkra, és minden $C \subset A$ halmazra. Ezért

$$\begin{aligned} P((\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in C) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in \bar{C}) &= \int_{\bar{C}} \frac{1}{(b-a)^n}\, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_C \frac{n!}{(b-a)^n}\, dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

és innen következik a feladat állítása.

73.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda > 0$ paraméterrel, és tekintsük az $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1, 2, \dots,$ részletösszegeket. Az $(S_1, \dots, S_{n+1})$ véletlen vektornak van $g(u_1, \dots, u_{n+1})$ sűrűségfüggvénye, és az a $g(u_1, \dots, u_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda u_{n+1}}$ függvény, ha $0 \le u_1 < \dots < u_{n+1}$, és $g(u_1, \dots, u_{n+1}) = 0$ egyébként.

Megoldás. Ismerjük a $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvényét, és e sűrűségfüggvény segítségével fel tudjuk írni a keresett eloszlásfüggvény értékeit megadó $P(S_1 < x_1, \dots, S_{n+1} < x_{n+1})$ valószínűségeket alkalmas integrál formájában. Ezeket az integrálokat átírva megfelelő koordinátatranszformáció segítségével megkapjuk a feladat megoldását.

A $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye a $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} k(v_j)$ függvény, ahol $k(v) = \lambda e^{-\lambda v}$, ha $v \ge 0$, és $k(v) = 0$, ha $v < 0$. Továbbá,

$$\begin{aligned} P(S_1 < x_1, \dots, S_{n+1} < x_{n+1}) &= P((\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in A_{n+1}) \\ &= \int_{A_{n+1}} h(v_1, \dots, v_{n+1})\, dv_1 \dots dv_{n+1}, \end{aligned}$$

ahol $A_{n+1} = A_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \{(v_1, \dots, v_{n+1})\colon\ v_1 < x_1, v_1 + v_2 < x_2, \dots, v_1 + \dots + v_{n+1} < x_{n+1}\}$. Valóban,

$$\{\omega\colon\ S_1(\omega) < x_1, \dots, S_{n+1}(\omega) < x_{n+1}\} = \{\omega\colon\ (\xi_1(\omega), \dots, \xi_{n+1}(\omega)) \in A_{n+1}\},$$

és a $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye a $h(v_1, \dots, v_{n+1})$ függvény. Innen következik a fenti azonosság.

Alkalmazzuk az $u_j = v_1 + \dots + v_j$, $1 \le j \le n+1$, transzformációt. E transzformáció Jacobianja 1, másrészt $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} k(u_j - u_{j-1})$, $u_0 = 0$ választással, ahonnan $h(v_1,\dots,v_{n+1})=g(u_1,\dots,u_{n+1})$, azaz $h(v_1,\dots,v_{n+1})=\lambda^{n+1}e^{-u_{n+1}}$, ha $0<u_1<\dots<u_{n+1}$ mert ez felel meg a $v_j>0$, $1\le j\le n+1$ feltételnek, és $h(v_1,\dots,v_{n+1})=g(u_1,\dots,u_{n+1})=0$, egyébként.

Meg kell még gondolni, hogy mi az A_{n+1} halmaz B_{n+1} inverze a fenti (invertálható) transzformáció esetén, mert ez a transzformált integrál integrálási tartománya. Egyszerű számolás mutatja, hogy $B_{n+1}=\{(u_1,\dots,u_{n+1})\colon\ u_1<x_1,\dots,u_{n+1}<x_{n+1}\}$.

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&P(S_1<x_1,\dots,S_{n+1}<x_{n+1})\\&\quad=\int_{\{(u_1,\dots,u_{n+1})\colon\ u_1<x_1,\dots,u_{n+1}<x_{n+1}\}}g(u_1,\dots,u_{n+1})\,du_1\dots du_n,\end{aligned}$$

és ez volt a bizonyítandó állítás.

74.) Legyenek adva független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\xi_1,\ \dots,\ \xi_n$ valószínűségi változók, és egy tőlük független η valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $g(x)=\frac{\lambda^{n+1}x^n}{n!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$, és $g(x)=0$, ha $x<0$. (Az η valószínűségi változó eloszlása megegyezik $n+1$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlásával.) Tekintsük a $\xi_1,\dots\xi_n$ valószínűségi változókból készített $\xi_1^*<\dots<\xi_n^*$ rendezett mintát, és definiáljuk a $(T_1,\dots,T_n)=(\eta\xi_1^*,\dots,\eta\xi_n^*)$ véletlen vektort, és legyen $\eta=T_{n+1}$. Mutassuk meg, hogy a

$$(T_1,\dots,T_n,T_{n+1})=(\eta\xi_1^*,\dots,\eta\xi_n^*,\eta)$$

véletlen vektor eloszlása megegyezik $n+1$ darab független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó $(S_1,\dots,S_{n+1})$ részletösszegeiből álló véletlen vektor eloszlásával.

Megoldás. A $(\xi_1^*,\dots,\xi_n^*,\eta)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye (a 72. feladat eredménye alapján)

$$g(v_1,\dots,v_{n+1})=\lambda^{n+1}v_{n+1}^n e^{-\lambda v_{n+1}},\quad \text{ha } 0\le v_1<v_2<\dots<v_n\le 1,\ \ v_{n+1}\ge 0,$$

és $g(v_1,\dots,v_{n+1})=0$ egyébként. Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&P(T_1<x_1,\dots,T_n<x_n,T_{n+1}<x_{n+1})=P(\eta\xi_1^*<x_1,\dots,\eta\xi_n^*<x_n,\eta<x_{n+1})\\&\qquad=\int h(v_1,\dots,v_{n+1})g(v_1,\dots,v_{n+1})\,dv_1\dots dv_{n+1},\end{aligned}$$

ahol

$$h(v_1,\dots,v_{n+1})=1,\quad \text{ha } v_jv_{n+1}<x_j,\ \ 1\le j\le n,\quad \text{és } v_{n+1}<x_{n+1},$$

és $h(v_1,\dots,v_{n+1})=0$ egyébként. Valóban, a keresett valószínűség egyenlő az $Eh(\xi_1^*,\dots,\xi_n^*,\eta)$ várható értékkel, és mivel a $(\xi_1^*,\dots,\xi_n^*,\eta)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye $g(v_1,\dots,v_{n+1})$ ezt a várható értéket az adott módon kell kiszámolni.

Írjuk át ezt az integrált az $u_j = v_{n+1}v_j$, $1 \le j \le n$, $u_{n+1} = v_{n+1}$ (invertálható) transzformáció segítségével. Ennek a transzformációnak a Jacobian-ja $|u_{n+1}^{-n}| = u_{n+1}^{-n}$, ha $u_{n+1} > 0$. Ugyanis $v_j = \frac{u_j}{u_{n+1}}$, $1 \le j \le n$, $v_{n+1} = u_{n+1}$, ezért $\frac{\partial v_j}{\partial u_j} = \frac{1}{u_{n+1}}$, $1 \le j \le n$, $\frac{\partial v_j}{\partial u_{n+1}} = -\frac{u_j}{u_{n+1}^2}$, $1 \le j \le n$, $\frac{\partial v_{n+1}}{\partial u_{n+1}} = 1$, és $\frac{\partial v_j}{\partial u_k} = 0$ egyébként. Innen könnyen látható, hogy a Jacobiant definiáló mátrix determinánsa egyenlő a mátrix diagonális elemeinek szorzatával, ami u_{n+1}^{-n}-nel egyenlő.

Ezt felhasználva a fenti azonosságot a következőképp írhatjuk át.

$$
\begin{aligned}
&P(T_1 < x_1, \dots, T_n < x_n, T_{n+1} < x_{n+1}) \\
&\quad = \int \bar{h}(u_1, \dots, u_{n+1}) \bar{g}(u_1, \dots, u_{n+1}) u_{n+1}^{-n} \, du_1 \dots du_{n+1} \\
&\quad = \int_{\{(u_1, \dots, u_{n+1}) \colon u_1 < x_1, \dots, u_{n+1} < x_{n+1}, \; 0 \le u_1 < \dots < u_{n+1}\}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda u_{n+1}} \, du_1 \dots du_{n+1},
\end{aligned}
$$

ahol $\bar{h}(u_1, \dots, u_{n+1}) = 1$, ha $u_j < x_j$, $1 \le j \le n+1$, és $\bar{h}(u_1, \dots, u_{n+1}) = 0$ egyébként, $\bar{g}(u_1, \dots, u_{n+1}) = \lambda^{n+1} u_{n+1}^n e^{-\lambda u_{n+1}}$, ha $0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_n < u_{n+1}$, és $\bar{g}(u_1, \dots, u_{n+1}) = 0$ egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $(T_1, \dots, T_n, T_{n+1})$ vektor sűrűségfüggvénye $\lambda^{n+1} e^{-\lambda u_{n+1}}$, ha $0 \le u_1 < \dots < u_{n+1}$, és nulla egyébként. Összehasonlítva ezt a relációt a *független exponenciális eloszlású valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének a kiszámításánál* kapott képlettel (lásd a 27. vagy 73. feladat eredményét) megkapjuk a feladat állítását.

74a.) Legyen $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Definiáljuk az $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $1 \le k \le n+1$, részletösszegeket és a $(Z_1, \dots, Z_n) = \left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}}\right)$ véletlen vektort. Mutassuk meg, hogy a $(Z_1, \dots, Z_n)$ véletlen vektor független az S_{n+1} valószínűségi változótól, és eloszlása megegyezik egy n elemű, független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változót tartalmazó sorozatból készített rendezett minta eloszlásával.

Megoldás. Tekintsünk $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változókat λ paraméteterrel, ezek $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $1 \le k \le n+1$, részletösszegeit, valamint független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $(Z_1, \dots, Z_n)$ valószínűségi változókat, egy tőlük független, és az S_{n+1} valószínűségi változóval megegyező eloszlású η valószínűségi változót. Legyen $0 \le Z_1^* < \dots < Z_n* \le 1$ a Z_k, $1 \le k \le n$, valószínűségi változókat, és definiáljuk a $T_k = \eta Z_k^*$, $k = 1, \dots, n$, és $T_{n+1} = \eta$ valószínűségi változókat. A 74. feladat eredménye alapján az $(S_1, \dots, S_{n+1})$ és $(T_1, \dots, T_{n+1})$ véletlen vektorok eloszlása megegyezik. De ebből az is következik, hogy az $\left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}}, S_{n+1}\right)$ és $\left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \dots, \frac{T_n}{T_{n+1}}, T_{n+1}\right) = (Z_1^*, \dots, Z_n^*, \eta)$ véletlen vektorok eloszlása is megegyezik, és ezt kellett belátni. Az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy egy véletlen vektor eloszlása meghatározza e véletlen vektor függvényeinek az eloszlását is.

75.) Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező az $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet, rajta a szokásos $\mathcal{A}$ Borel σ-algebrával, és legyen $P = \lambda$, a Lebesgue mérték az egységnégyzet Borel-mérhető részhalmazain. Legyen $\mathcal{F}$ az $A \times [0,1]$, $A \in \mathcal{B}_1$ alakú halmazokból álló σ-algebra, ahol $\mathcal{B}_1$ a $[0,1]$ intervallumon generált σ-algebrát jelöli. Tekintsünk egy tetszőleges (mérhető és integrálható) $f(x,y)$ függvényt az egységnégyzeten (az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn), és számoljuk ki az $E(f(x,y)|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn.

Megoldás. Ha az $f(x,y)$ függvény valóban függ mind a két változójától, akkor nem $\mathcal{F}$ mérhető függvény. Viszont definiáljuk a $g_0(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$ és $g(x,y) = g_0(x)$ függvényeket. (A $g(x,y)$ függvény valójában nem függ az y koordinátától, viszont tekinthető egy az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változónak, és mivel nem függ az y koordinátától (és Borel mérhető), ezért $\mathcal{F}$ mérhető. Azt állítom, hogy $E(f(x,y)|\mathcal{F}) = g(x,y)$. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy

$$\int_{A\times[0,1]} g(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\times[0,1]} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Viszont

$$\begin{aligned}\int_{A\times[0,1]} g(x,y)\,dx\,dy &= \int_A g_0(x)\,dx = \int_A \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx \\ &= \int_{A\times[0,1]} f(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

amint állítottuk.

76.) Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező az $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet, rajta a szokásos $\mathcal{A}$ Borel σ-algebrával. Rögzítsünk egy olyan $h(x,y)$ függvényt az egységnégyzeten, amelyre $h(x,y) \ge 0$ minden (x,y) pontban, $\int_0^1\int_0^1 h(x,y)\,dx\,dy = 1$, és legyen a P mérték az egységnégyzeten a Lebesgue mérték szerint $h(x,y)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező mérték, azaz legyen $P(B) = \int_B h(x,y)\,dx\,dy$ az egységnégyzet minden Borel-mérhető B részhalmazán. Legyen $\mathcal{F}$ az $A\times[0,1]$ alakú halmazokból álló σ-algebra, ahol $A \in \mathcal{B}_1$, és $\mathcal{B}_1$ a $[0,1]$ intervallumon generált σ-algebrát jelöli. Tekintsünk egy tetszőleges (mérhető és a P mérték szerint integrálható) $f(x,y)$ függvényt az egységnégyzeten, és számoljuk ki az $E(f(x,y)|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn.

Megoldás. A keresett feltételes várható érték a következő: Definiáljuk a

$$g_0(x) = \int_0^1 f(x,y)\frac{h(x,y)}{\int_0^1 h(x,y)\,dy}\,dy = \frac{\int_0^1 f(x,y)h(x,y)\,dy}{\int_0^1 h(x,y)\,dy}$$

és $g(x,y) = g_0(x)$ függvényeket. Azt állítom, hogy a $g(x,y)$ függvény a keresett feltételes várható érték. Ez a függvény nem függ az y koordinátától, így $\mathcal{F}$ mérhető. Azt állítom, hogy $E(f(x,y)|\mathcal{F}) = g(x,y)$. Azt kell ellenőrizni, hogy

$$\int_{A\times[0,1]} g(x,y)h(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\times[0,1]} f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy$$

minden mérhető $A \subset [0,1]$ halmazra. Viszont

$$\begin{aligned}\int_{A\times[0,1]} g(x,y)h(x,y)\,dx\,dy &= \int_A \left(\int_0^1 h(x,y)\,dy\right) g_0(x)\,dx \\ &= \int_A \left(\int_0^1 f(x,y)h(x,y)\,dy\right) dx = \int_{A\times[0,1]} f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

amint állítottam. A kapott eredmény megfelel szemléletes képünknek, amely szerint rögzített x_0 számra az $E(f(x,y)|x=x_0)$ feltételes várható értéket úgy számolhatjuk ki, hogy az $f(x_0,y)$ függvényt kiintegráljuk az y változó szerint, de nem a $h(x_0,y)$ sűrűségfüggvény, hanem ennek normalizáltja a $\frac{h(x_0,y)}{\int_0^1 h(x_0,y)\,dy}$ sűrűségfüggvény szerint.

77.) Legyen (ξ,η) egy két-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Számítsuk ki az $E(\xi|\eta)$ feltételes várható értéket.

Megoldás: Láttuk, (lásd a többváltozós centális határeloszlástétel előadás eredményeit) hogy $\xi = a\eta + \zeta$ alakban írható, ahol az a konstans alkalmas választásával (nevezetesen az $a = \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\operatorname{Var}\eta}$ választással) elérhető, hogy a $\zeta = \xi - a\eta$ és η valószínűségi változók függetlenek legyenek. Ezzel az a választással

$$\begin{aligned}E(\xi|\eta) &= E((a\eta+\zeta)|\eta) = aE(\eta|\eta) + E(\zeta|\eta) = a\eta + E\zeta = a(\eta - E\eta) + E\xi \\ &= \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\operatorname{Var}\eta}(\eta - E\eta) + E\xi\end{aligned}$$

a várható értéknek az előadásban a feltételes várható érték tulajdonságait felsoroló tételben szereplő 1., 5. és 6. tulajdonságok alapján.