A JAVÍTÓ DOLGOZAT FELADATAI

1.) Legyen ξ és η két független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki a $\xi - \eta$ különbség sűrűségfüggvényét.

2.) Legyen (ξ, η) kétdimenziós véletlen vektor, amelynek eloszlása egyenletes a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcspontok által meghatározott háromszögben, azaz sűrűségfügggvénye $f(x,y) = 2$, ha $x > 0$, $y > 0$, és $x + y \le 1$, és $f(x,y) = 0$ egyébként. Számoljuk ki a ξ^2 és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi^2, \eta)$ kovarianciáját.

3.) A következő játékot játszuk. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 20 golyót. A páratlan számú húzásokban 2 forintot nyerünk piros golyó húzása esetén és sem nem vesztünk sem nem nyerünk fehér golyó húzása esetén. A páros számú húzásokban 1 forintot vesztünk fehér golyó húzása esetén és sem nem vesztünk sem nem nyerünk piros golyó húzása esetén. Számoljuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

4.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 3 szórásnégyzettel, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-(x-1)^2/6}$. Számoljuk ki az $E\xi^4$ várható értéket.

5.) Ledobunk a $[0,3]$ intervallumba egymástól függetlenül 3600 pontot egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok véletlen helyét megadó valószínűségi változók sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{3}$, ha $0 \le x \le 3$, és $f(x) = 0$ egyébként. Egy jegyzőkönyvbe beírjuk minden ledobott pont helyének az értékét, ha az a $[0,2]$ intervallumban van, és a 2 számot, ha a ledobott pont a $[2,3]$ intervallumba esik. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy a jegyzőkönyvbe írt 3600 szám összege a 4750 és 4820 számok közé esik.

6.) Mikor mondjuk, hogy egy $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektor normális eloszlású nulla várható értékkel?

Megoldások.

1.) Mint a gyakorlaton megbeszéltük, ha ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x)$ és $g(x)$, ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye $f * g^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(y-x)\,dy$, ahol $g^-(x) = g(-x)$ a $-\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Jelen feladatban $f(x) = g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = g(x) = 0$, ha $x < 0$. Érdemes külön nézni az $f * g^-(x)$ értékét az $x > 0$ és $x < 0$ számokra. Az $x > 0$ esetben $f(y)g(y-x) = \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{-\lambda(y-x)} = \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)}$, ha $y \ge 0$ és $y - x \ge 0$, azaz $y \ge x$, és $f(y)g(y-x) = 0$, ha $y < x$. Hasonlóan, az $x < 0$ esetben $f(y)g(y-x) = \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{-\lambda(y-x)} = \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)}$, ha $y \ge 0$, és $y - x \ge 0$, azaz $y \ge 0$, és $f(y)g(y-x) = 0$, ha $y < 0$. Innen $f * g^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y-x)\,dy = \int_x^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)}\,dy = \lambda^2 e^{\lambda x} \left[\frac{e^{-2\lambda y}}{-2\lambda}\right]_x^{\infty} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $f * g^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y-x)\,dy = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(2y-x)}\,dy = \lambda^2 e^{\lambda x} \left[\frac{e^{-2\lambda y}}{-2\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x}$, ha $x \leq 0$. Így kiszámoltuk a $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét. Ezt úgy is felírhatjuk egységesebb formában, hogy $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

Ezt a számolást lehetett volna kissé egyszerűsíteni, észrevéve, hogy a $\xi - \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye páros függvény, ezért elegendő azt csak az $x > 0$ számokra kiszámolni.

2.) $\mathrm{Cov}\,(\xi^2, \eta) = E\xi^2\eta - E\xi^2 E\eta$. Továbbá,

$$E\xi^2\eta = \int x^2 y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x^2 y\,dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left[y^2\right]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 x^2(1-2x+x^2)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30},$$

$E\xi^2 = \int x^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x^2\,dy \right) dx = \int_0^1 2(1-x)x^2\,dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, és $E\eta = \int y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2y\,dy \right) dx = \int_0^1 (1-x)^2\,dx = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Ezért $\mathrm{Cov}\,(\xi^2, \eta) = \frac{1}{30} - \frac{1}{18} = -\frac{1}{45}$.

3.) Vezessük be a következő ζ_j, $1 \leq j \leq 20$, valószínűségi változókat. Abban az esetben, ha j páratlan szám, $\zeta_j = 2$, ha piros golyót húzunk, $\zeta_j = 0$, ha fehér golyót húzunk a j-ik húzásban. Abban az esetben, ha j páros szám, $\zeta_j = -1$, ha fehér golyót húzunk, $\zeta_j = 0$, ha piros golyót húzunk a j-ik húzásban. Ekkor minket a $\zeta = \sum\limits_{j=1}^{20} \zeta_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Az egyszerűbb jelölés érdekében vezessük be a $\xi_j = \zeta_{2j-1}$, és $\eta_j = \zeta_{2j}$, $1 \leq j \leq 10$, valószínűségi változókat. Ekkor $\zeta = \sum\limits_{j=1}^{20} \zeta_j = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j + \sum\limits_{j=1}^{10} \eta_j$.

$E\xi_j = 2\frac{20}{50} = \frac{4}{5}$, $E\eta_j = -\frac{30}{50} = -\frac{3}{5}$, ahonnan $E\zeta = 10(E\xi_1 + E\eta_1) = 2$. A $\mathrm{Var}\,\zeta$ kiszámolásához ki kell számolnunk a $\mathrm{Var}\,\zeta_j$, azaz a $\mathrm{Var}\,\xi_j$ és $\mathrm{Var}\,\eta_j$ és a $\mathrm{Cov}\,(\zeta_j, \zeta_k)$, azaz a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \eta_k) = \mathrm{Cov}\,(\xi_k, \eta_j)$ valamint $\mathrm{Cov}\,(\eta_j, \eta_k)$ mennyiségeket.

$\mathrm{Var}\,\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{8}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$, $\mathrm{Var}\,\eta_j = E\eta_j^2 - (E\eta_j)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{6}{25}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = 4\frac{2}{5}\frac{19}{49} - \frac{16}{25} = \frac{-24}{1225}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \eta_k) = E\xi_j\eta_k - E\xi_j E\eta_k = -2\frac{2}{5}\frac{29}{49} + \frac{12}{25} = \frac{8}{1225}$, $\mathrm{Cov}\,(\eta_j, \eta_k) = E\eta_j\eta_k - E\eta_j E\eta_k = \frac{3}{5}\frac{29}{49} - \frac{9}{25} = \frac{-6}{1225}$. Innen $\mathrm{Var}\,\zeta = \sum\limits_{j=1}^{20} \mathrm{Var}\,\zeta_j + \sum\limits_{1 \leq j,k \leq 20,\, j \neq k} \mathrm{Cov}\,(\zeta_j, \zeta_k) = 10(\mathrm{Var}\,\xi_1 + \mathrm{Var}\,\eta_1) + 90(\mathrm{Cov}\,(\xi_1, \xi_2) + \mathrm{Cov}\,(\eta_1, \eta_2)) + 200\mathrm{Cov}\,(\xi_1, \eta_1) = 12 + \frac{-90\cdot 24 - 90\cdot 6 + 200\cdot 8}{1225} = 12 - \frac{44}{49}$.

4.) A ξ valószínűségi változó felírható $\xi = \sqrt{3}\eta + 1$ alakban, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezért $\xi^4 = (\sqrt{3}\eta)^4 + 4(\sqrt{3}\eta)^3 + 6(\sqrt{3}\eta)^2 + 4\sqrt{3}\eta + 1$, ahonnan $E\xi^4 = E(\sqrt{3}\eta)^4 + 6E(\sqrt{3}\eta)^2 + 1 = 9E\eta^4 + 18E\eta^2 + 1 = 27 + 18 + 1 = 46$, mert $E\eta = E\eta^3 = 0$, $E\eta^4 = 3$, $E\eta^2 = 1$, mint a gyakorlaton láttuk.

5.) Jelölje ζ_j a j-ik ledobott pont helyét, és legyen $\xi_j = f(\zeta_j)$, $1 \leq j \leq 3600$, ahol $f(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 2$, $f(x) = 2$, ha $x \leq 2 \leq 3$. Ekkor ζ_j, $1 \leq j \leq k$, független, a $[0,3]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók, a jegyzőkönyvbe írt számok összege $S = \sum\limits_{j=1}^{3600} \xi_j$, és minket a $P(4750 < S < 4820)$ valószínűség érdekel. Ennek kiszámolása érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$, és $\operatorname{Var}\xi_j$ mennyiségeket. $E\xi_j = Ef(\zeta_j) = \int_0^3 \frac{f(x)}{3}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{3}\,dx + \int_2^3 \frac{2}{3}\,dx = \left[\frac{x^2}{6}\right]_0^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. $E\xi_j^2 = Ef^2(\zeta_j) = \int_0^3 \frac{f^2(x)}{3}\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{3}\,dx + \int_2^3 \frac{4}{3}\,dx = \left[\frac{2^3}{9}\right]_0^2 + \frac{4}{3} = \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$. Innen $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$.

Ezért $ES = 4800$, $\operatorname{Var} S = 1600 = 40^2$, ahonnan

$$\begin{aligned}
P(4750 < S < 4820) &= P\left(\frac{4750-4800}{40} \le \frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{4820-4800}{40}\right) \\
&= P\left(-1.25 \le \frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le 0.5\right) \sim \Phi(0.5) - \Phi(-1.25) \\
&= \Phi(0.5) + \Phi(1.25) - 1 = 0.6915 + 0.8944 - 1 = 0.5859.
\end{aligned}$$

Az $E\xi_j$ és $\operatorname{Var}\xi_j$ mennyiségeket közvetlenül is ki tudtuk volna számolni a ζ_j valószínűségi változók bevezetése nélkül Stieltjes integrálok segítségével.

6.) Vezessük be először a standard normális eloszlású vektor fogalmát. Azt mondjuk, hogy $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ n-változós standard normális eloszlású vektor, ha ennek koordinátái, η_1, η_2, …, η_n, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ha A egy $n\times n$ méretű (determinisztikus) mátrix, és $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ n-változós standard normális eloszlású vektor, akkor a $(\xi_1,\dots,\xi_n) = (\eta_1,\dots,\eta_n)A$ véletlen vektor nulla várható értékű, normális eloszlású véletlen vektor. Az n-változós normális eloszlású nulla várható értékű vektorok azok a véletlen vektorok, amelyek eloszlása megegyezik egy ilyen módon előállítható $(\eta_1,\dots,\eta_n)A$ véletlen vektor eloszlásával alkalmas A mátrix-szal.

Megjegyzés. Bár nem bizonyítottuk be, de némi munkával (lineáris algebrai meggondolások segítségével) belátható, hogy egy nulla várható értékű normális eloszlású $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektorra nemcsak az igaz, hogy az eloszlása megegyezik egy $(\eta_1,\dots,\eta_n)A$ véletlen vektor eloszlásával, ahol $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ standard normális eloszlású, hanem létezik olyan $(\bar\eta_1,\dots,\bar\eta_n)$ standard normális eloszlású véletlen vektor, amelyre $(\xi_1,\dots,\xi_n) = (\bar\eta_1,\dots,\bar\eta_n)A$.