JAVÍTÓ DOLGOZAT FELADATAI

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Legyen η egyenletes eloszlású a $[-1,0]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvénye $g(x) = 1$, ha $-1 \le x \le 0$, és $g(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét.

2.) Legyen (ξ, η) kétdimenziós véletlen vektor, amelynek eloszlása egyenletes a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcspontok által meghatározott háromszögben, azaz sűrűségfügggvénye $f(x,y) = 2$, ha $x > 0$, $y > 0$, és $x + y \le 1$, és $f(x,y) = 0$ egyébként. Számoljuk ki a ξ^2 és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi^2, \eta)$ kovarianciáját.

3.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevéssel 101 golyót. Jelölje ξ azon húzások számát, amikor a kihúzott golyó színe megegyezik az előzőleg kihúzott golyó színével. Számoljuk ki ξ várható értékét és szórásnégyzetét.

4.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó -1 várható értékkel és 4 szórásnégyzettel, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-(x+1)^2/8}$. Számoljuk ki az $Ee^{t\xi}$ várható értéket tetszőleges t valós számra.

5.) Az a feltételezésünk, hogy egy nálunk levő pénzdarab legalább $\frac{4}{5}$ valószínűséggel esik a fej, és legfeljebb $\frac{1}{5}$ valószínűséggel az írás oldalra. E feltevés ellenőrzése érdekében feldobjuk a pénzdarabot 10 000 alkalommal, és kijelölünk egy k számot úgy, hogy amennyiben legalább k darab fejdobás történt akkor elfogadjuk ezt a feltevést, ha pedig kevesebb fejdobás történt, akkor elutasítjuk. Hogyan válasszuk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy feltevésünk helyessége esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy igaz ez a feltevés?

6.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek?