A Valószínűségszámítás II. előadássorozat ötödik témája.

POISSON ÉS EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁSÚ VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK, POISSON FOLYAMATOK.

Ismertetem Poisson mezők és Poisson folyamatok definicióját, illetve bebizonyítom, hogy ilyen mezők és folyamatok valóban léteznek. A bizonyítás érdekében először felidézem a Poisson eloszlású valószínűségi változók definicióját és megadom azok legfontosabb tulajdonságait.

Poisson eloszlás definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó akkor λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, ha nem negatív egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ily módon valóban valószínűségi változót definiáltunk, mert

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Számítsuk ki egy ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda+\lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E\xi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

és $\operatorname{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$.

A következő egyszerű állítás a Poisson eloszlású valószínűségi változók egyik legfontosabb tulajdonságát fejezi ki. Ezért ezt Tétel formájában fogalmazom meg.

Tétel független, Poisson eloszlású valószínűségi változók összegének eloszlásáról. *Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor a $\xi + \eta$ összeg $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.*

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
P(\xi+\eta=k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi=j,\eta=k-j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi=j)P(\eta=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^j\mu^{(k-j)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.
\end{aligned}
$$

A fenti eredmény következménye, hogy véges sok független, Poisson eloszlású valószínűségi változó összege egy olyan Poisson eloszlású valószínűségi változó, amelynek paramétere az egyes valószínűségi változók paramétereinek az összege. A következő szintén tétel formájában megfogalmazott eredmény ezen állítás megfordításának is tekinthető. Ebben egy Poisson eloszlású valószínűségi változót bontunk fel független, kisebb paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók összegére egy alkalmas konstrukció segítségével. Ez az eredmény fontos szerepet fog játszani Poisson mezők és Poisson folyamatok konstrukciójában is.

Tétel Poisson eloszlású valószínűségi változók felbontásáról. *Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól is függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó $p_j \ge 0$ valószínűséggel esik a j-ik urnába, $j=1,\dots,k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j=1,\dots,k$, valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j=1,\dots,k$.*

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
P(\eta_1=l_1,\dots,\eta_k=l_k) &= P(\xi=l_1+\cdots+l_k)\frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k} \\
&= \frac{\lambda^{(l_1+\cdots+l_k)}}{(l_1+\cdots+l_k)!}e^{-\lambda}\frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k} \\
&= \frac{\lambda^{l_1}\cdots\lambda^{l_k}}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}e^{-\lambda(p_1+\cdots+p_k)} = \prod_{j=1}^{k}\frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!}e^{-\lambda p_j}
\end{aligned}
$$

tetszőleges $l_1 \ge 0, \dots, l_k \ge 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

Érvényes egy fontos határeloszlástétel is, amelyikben a határeloszlás a Poisson eloszlás. Ezt az eredményt a Poisson mezők és Poisson folyamatok konstrukciója után fogom felidézni, de a bizonyítást csak a kiegészítésben tárgyalom.

Bevezetem a véletlen mező fogalmát, majd annak számunkra legfontosabb speciális esetét, a Poisson mezőket. A véletlen mező szemléletes tartalma az, hogy egy alaphalmaznak, például a síknak vagy a számegyenesnek kijelöljük véletlenül véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok kitüntetett pontját. Ezután elsősorban olyan kérdésekre vagyunk kiváncsiak, hogy az alaphalmaz valamely szép részhalmazába hány kijelölt pont került. Ez a pontszám természetesen a véletlentől függ, ez tehát egy valószínűségi változó. A véletlen mezők definiciója a következő.

Véletlen mező definiciója. *Legyen adva egy* $(U,\mathcal{U})$ *mérhető tér, azaz egy* U *halmaz, és annak bizonyos részhalmazaiból álló* σ*-algebra valamint egy* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *valószínűségi mező és azon véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok* U*-halmazbeli értékű általánosított valószínűségi változó. Ez azt jelenti, hogy minden* $B\in\mathcal{U}$ *halmazra és* $j=1,2,\dots,$ *számra* $\{\omega\colon\ \xi_j(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$. *Az 'általánosított' jelző ebben a definicióban arra utal, hogy nem követeljük meg, hogy a* $\xi_j(\omega)$ *függvények minden* $\omega\in\Omega$ *elemi eseményre definiálva legyenek. Lehetséges, hogy bizonyos* $\xi_j(\cdot)$ *függvények csak valamely* $A_j\subset\Omega$*,* $A_j\in\mathcal{A}$*, halmazon vannak definiálva.*

Ha adva egy véletlen mező valamely $(U,\mathcal{U})$ téren, akkor definiálhatjuk minden $B\in\mathcal{U}$ halmazra a

$$\chi_B(\omega)=\{\text{azon } j \text{ indexek száma, amelyekre } \xi_j(\omega)\in B\}$$

valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a B halmazba hány kijelölt pont esik. A $\chi_B(\omega)=\infty$ lehetőség szintén megengedett. Vegyük észre, hogy $\chi_B(\omega)$ (esetleg végtelen értéket is felvevő) valószínűségi változó, azaz $\{\omega\colon\ \chi_B(\omega)=k\}\in\mathcal{A}$ minden $k=0,1,2,\dots$ számra. Valóban, minden (véges) k hosszúságú $j_1,\dots,j_k$ pozitív egész számokból álló sorozatra és $B\in\mathcal{U}$ halmazra definiálhatjuk a

$$D_B(j_1,\dots,j_k,\omega)=\{\omega\colon\ \xi_{j_s}(\omega)\in B,\ 1\le s\le k,\ \xi_l(\omega)\notin B,\ \text{ha } l\notin\{j_1,\dots,j_k\}\}\in\mathcal{A},$$

eseményt. Rögzített k számra megszámlálhatóan sok $D_B(j_1,\dots,j_k,\omega)$ esemény van, és a $\chi_B(\omega)$ esemény ezek uniója. Ez azt jelenti, hogy mindig beszélhetünk a $P(\chi_B(\omega)=k)$, $B\in\mathcal{U}$, $k=0,1,2,\dots,$ valószínűségekről. A véletlen mező és a $\chi_B(\omega)$ valószínűségi változó definiciójából következik, hogy két diszjunkt B_1 és B_2 halmazra $\chi_{B_1\cup B_2}(\omega)=\chi_{B_1}(\omega)+\chi_{B_2}(\omega)$, sőt ez az additivítási tulajdonság megszámlálható sok diszjunkt halmazra is igaz.

A Poisson mező speciális sztochasztikus mező. Megadom ennek definicióját.

Poisson mező definiciója. *Legyen adva egy* $(U,\mathcal{U})$ *mérhető tér, és azon egy* μ *véges vagy* σ*-véges mérték. Egy véletlen mező Poisson mező* μ *számláló mértékkel, ha minden olyan* $B\in\mathcal{U}$ *halmazra, amelyre* $\mu(B)<\infty$*,* $\chi_B(\omega)$ *Poisson eloszlású valószínűségi változó* $\mu(B)$ *paraméterrel, továbbá, ha* $B_1,\ B_2,\ \dots\ B_k$ *diszjunkt* $\mathcal{U}$ *mérhető halmazok,* $\mu(B_j)<\infty$*,* $1\le j\le k$*, akkor a* $\chi_B(\omega)$ *valószínűségi változók függetlenek.*

Emlékeztetőül megjegyzem, hogy egy mérték véges egy $(U,\mathcal{U})$ mérhető téren, ha $\mu(U)<\infty$, és σ-véges, ha előállítható megszámlálhatóan végtelen sok véges mérték

$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ összegeként. Példa σ-véges, de nem véges mértékre a Lebesgue mérték (azaz a térfogat) az Euklideszi téren. Ebbben az esetben a μ mérték előállítható a kívánt összeg alakjában például úgy, hogy a μ_k mértéknek a Lebesgue mérték megszorítását vesszük a $k-1$ és k sugarú gömbfelületek közötti tartományba. Bár a véletlen mezőket az általános esetben definiáltam, minket a továbbiakban csak a Poisson mezők fognak érdekelni. Ezen belül is csak azzal az esettel fogok foglalkozni, amikor az U halmaz a k-dimenziós Euklideszi tér, (speciálisan a számegyenes) vagy annak egy szép részhalmaza, és az $\mathcal{U}$ σ-algebra az U halmaz Borel mérhető részhalmazaiból áll. A fő probléma annak megmutatása, hogy a Poisson mezők valóban léteznek.

Tétel Poisson mezők létezéséről. *Legyen adva egy μ véges vagy σ-véges mérték az R^n n-dimenziós Euklideszi tér $\mathcal{B}^n$ Borel σ-algebráján. Létezik az R^n n-dimenziós tér Borel σ-algebráján Poisson mező ezzel a μ mértékkel, mint számláló mértékkel.*

A tétel bizonyítása. Tekintsük először azt az esetet, amikor a μ mérték véges. Legyen $M = \mu(R^n)$, és vezessük be a $\bar{\mu} = \frac{\mu}{M}$ valószínűségi mértéket. Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, és azon végtelen sok független $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ $\bar{\mu}$ eloszlású és egy tőlük független η Poisson eloszlású valószínűségi változót M paraméterrel. A Kolmogorov-féle alaptétel tárgyalásakor láttuk, hogy alkalmas valószínűségi mezőn léteznek ilyen valószínűségi változók. A Poisson mezőt úgy konstruáljuk, hogy ledobunk véletlenül η számú $\bar{\mu}$ eloszlású pontot egymástól függetlenül az R^n térbe. Pontosabban fogalmazva a következőt tesszük. Definiáljuk a ξ_j általánosított valószínűségi változókat a következő módon: $\xi_j(\omega) = \zeta_j(\omega)$, ha $j \le \eta(\omega)$, és a $\xi_j(\omega)$-t nem definiáljuk ha $\eta(\omega) > j$. Ilyen módon egy véletlen mezőt definiáltunk. Azt kell belátni, hogy ez a véletlen mező Poisson mező μ számláló mértékkel. Ehhez azt kell megmutatni, hogy ha kiválasztunk bizonyos $A_1 \in \mathcal{B}_n, \dots, A_k \in \mathcal{B}_n$ diszjunkt halmazokat, akkor az A_l halmazokba eső kijelölt $\xi_j(\omega)$ pontok számai egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mu(A_l)$ paraméterrel, $1 \le l \le k$. Ennek belátása érdekében egészítsük ki ezt a halmazrendszert az $A_{k+1} = R^n \setminus \bigcup_{l=1}^{k} A_l$ halmazzal. Az e halmazokba véletlenül ledobott kijelölt pontok számának eloszlását leírja a *Poisson eloszlású valószínűségi változók felbontásáról szóló tétel.* Eszerint az egyes A_l halmazokba eső pontok száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változók $M\bar{\mu}(A_l) = \mu(A_l)$ paraméterrel. Véges μ mértékek esetén a tételt beláttuk.

Ha μ σ-véges mérték, akkor tekintsük ennek valamely $\mu = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_l$ előállítását véges mértékek összegeként, és tekintsünk minden l-re egy a többi Poisson mezőtől független Poisson mezőt μ_l számlálómértékkel. (Ez lehetséges, ha a különböző Poisson mezőket egymástól független $\zeta_1^{(l)}, \zeta_2^{(l)}, \dots$ és $\eta^{(l)}$ független valószínűségi változók sorozatának a segítségével állítjuk elő.) Tekintsük e Poisson mezők összegét, azaz tekintsük azt a véletlen mezőt, amelynek kijelölt pontjai ezen Poisson mezők kijelölt pontjainak az uniója. Ilyen módon egy Poisson mezőt kapunk μ számláló mértékkel. Ugyanis egyrészt diszjunkt halmazokba eső kijelölt pontok száma egymástól független. Másrészt független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege Poisson eloszlású, és az összeg paramétere egyenlő az összeadandók paramétereinek az összegével. Innen nem nehéz látni, hogy egy A halmazba eső kijelölt pontok száma Poisson eloszlású $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_l(A) = \mu(A)$ paraméterrel, ha $\mu(A) < \infty$, és végtelen, ha $\mu(A) = \infty$.

Megjegyzés. A fenti tételt Poisson mezők létezéséről előírt számláló mértékkel hasonlóan lehet bizonyítani tetszőleges $(U, \mathcal{U})$ mértéktérre, ha azon adva van egy μ véges vagy σ-véges μ mérték. Az egyetlen különbség a bizonyításban az, hogy a konstrukcióban a Kolmogorov-féle alaptétel helyett a mértékterek végtelen szorzatáról szóló tételre kell hivatkozni.

A valószínűségszámításban szintén fontos szerepet játszanak a Poisson folyamatok. Ezek létezését is be kell bizonyítani. De ezt az állítást egyszerűen vissza lehet vezetni a Poisson mezők létezésére.

A Poisson folyamat alkalmas tulajdonságokkal rendelkező sztochasztikus folyamat a pozítiv félegyenesen vagy valamely $[0, T]$ intervallumon. (Egy adott $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált és valamely T halmaz elemeivel paraméterezett $X(t) = X(t, \omega)$, $t \in T$, valószínűségi változók rendszerét sztochasztikus folyamatnak nevezzük a T halmazon.)

Poisson folyamat definiciója. *Egy $X(t, \omega)$, $0 \le t \le T$, (vagy $0 \le t < \infty$) sztochasztikus folyamatot a $[0, T]$ intervallumon (vagy a pozitív félegyenesen) Poisson folyamatnak nevezünk λ paraméterrel, ha teljesíti a következő feltételeket:*

(i) Az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat független növekményű, azaz tetszőleges $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le T$ pontokra az $X(t_1, \omega)$, $X(t_2, \omega) - X(t_1, \omega)$, ... , $X(t_k, \omega) - X(t_{k-1}, \omega)$ valószínűségi változók függetlenek.

(ii) $X(0, \omega) = 0$ egy valószínűséggel, és $X(t, \omega) - X(s, \omega)$ Poisson eloszlású $\lambda(t - s)$ paraméterrel.

(iii) Az $X(\cdot, \omega)$ trajektória monoton növekvő, jobbról folytonos egész értékű függvény.

Tétel Poisson folyamat létezéséről. *Tetszőleges $\lambda > 0$ számra létezik λ paraméterű Poisson folyamat a $[0, T]$ intervallumon vagy $[0, \infty)$ félegyenesen.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy Poisson mezőt a számegyenesen, amelynek számláló mértéke $\lambda \times$ a Lebesgue mérték a $[0, T]$ intervallumon vagy a $[0, \infty)$ félegyenesen. Láttuk, hogy ilyen Poisson mező létezik. Legyen $X(t, \omega)$ egy ilyen Poisson mező kijelölt pontjainak a száma a $[0, t]$ intervallumban minden $0 \le t \le T$ vagy $0 \le t < \infty$ paraméterre. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat Poisson folyamat.

Megjegyzés. A Kolmogorov-féle alaptétel önmagában nem elegendő a Poisson folyamatok létezésének bizonyításához. Ennek segítségével be lehet látni, hogy létezik a Poisson folyamatok definiciójában szereplő (i) és (ii) tulajdonságot teljesítő sztochasztikus folyamat. De az, hogy a sztochasztikus folyamat trajektóriának tulajdonságairól szóló (iii) feltétel is kielégíthető külön indoklást igényel. Számunkra a Poisson mezők létezéséről szóló eredmény jelentett nagy segítséget ennek bizonyításában.

A bevezető valószínűségszámítás előadásban szerepelt egy olyan határeloszlástétel, amely megvilágította, hogy bizonyos véletlen jelenségek, mint például a csillaghullás vagy rádioaktív bomlás megfigyelésénél miért találkozunk gyakran Poisson eloszlású valószínűségi változókkal. Ha alaposabban, mélyebben tanulmányozzuk ezeket az eredményeket, és például a csillaghulláskor nemcsak arra vagyunk kiváncsiak, hogy egy rögzített időintervallumban hány csillag esik le, hanem a lehullott csillagok száma milyen (véletlen) függvénye a megfigyelési időtartamnak, akkor megérthetjük, hogy nemcsak a Poisson eloszlású valószínűségi változók, hanem a Poisson folyamatok is természetes módon megjelennek ilyen jelenségek vizsgálatában.

Most ezzel az általánosabb kérdéssel nem foglalkozunk. Viszont ismertetem azt a bevezető valószínűségszámításban tanult határeloszlástételt — kissé általánosabb alakban, — amelyben a Poisson eloszlás jelenik meg, mint határeloszlás. Ennek az eredménynek a bizonyításával itt nem foglalkozom. A korábban tanult bizonyítás a generátorfüggvények módszerén alapult. A kiegészítésben megadom ennek a tételnek egy más, önmagában is érdekes bizonyítását, amely jobban megvilágítja az eredmény hátterét.

A most megfogalmazott tételben szerepel egy új fogalom, a szériasorozat fogalma. Ezzel később is fogunk találkozni.

Határeloszlástétel Poisson határeloszlással. *Legyen adva egy*

$$\begin{array}{ll} \xi_{1,1}\dots,\xi_{1,n_1} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \xi_{k,1}\dots,\xi_{k,n_k} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}$$

szériasorozat, azaz $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots,$ $1\le j\le n_k$ valószínűségi változók egy olyan rendszere, amelyben az egy sorban álló (azaz ugyanolyan k index-szel rendelkező) valószínűségi változók függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy e valószínűségi változók teljesítik a következő feltételeket is:

1.) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem negatív egész értékeket vesznek fel.

2.) $P(\xi_{k,j}=1)=\lambda_{k,j}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}=\lambda>0$.

3.) $\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}\to0$, ha $k\to\infty$, és $\sum\limits_{j=1}^{n_k}P\left(\xi_{k,j}\ge2\right)\to0$, ha $k\to\infty$.

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $k\to\infty$, azaz $\lim\limits_{k\to\infty}P(S_k=l)=\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}$ minden $l=0,1,2,\dots$ számra.

Példa a határeloszlástétel Poisson eloszlással eredmény alkalmazására. Legyen adva (k,p_k) paraméterű binomiális eloszlású S_k valószínűségi változók sorozata, $k=1,2,\dots,$ amelyek paramétereire $\lim\limits_{k\to\infty}kp_k=\lambda$ valamely $\lambda>0$ számmal, ha $k\to\infty$. Ekkor az S_k valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $k\to\infty$. Ezt be lehet látni közvetlen számolással, de következik a fenti tételből is.

Valóban, tekintsünk minden $k = 1, 2, \dots$ indexre független $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le k$, valószínűségi változókat, amelyekre $P(\xi_{k,j} = 1) = 1 - P(\xi_{k,j} = 0) = p_k$. Ekkor az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_{k.j}$ összegek (k, p_k) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók, amelyek teljesítik a tétel feltételeit $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} kp_k$ paraméterrel. Ezért eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $k \to \infty$.

Exponenciális eloszlású valószínűségi változók, Poisson folyamatok, rendezett minták, és ezek kapcsolata egymással.

Független, exponenciális valószínűségi változók részletösszegei, Poisson folyamatok illetve úgynevezett egyenletes eloszlású rendezett minták között szoros kapcsolat van, amelynek megértése hasznos mind a valószínűségszámítás mind a matematikai statisztika számára. Néhány e problémakörbe tartozó eredményt fogunk bizonyítani. A bizonyítások fontos része lesz bizonyos véletlen vektorok eloszlás illetve sűrűségfüggvényének a kiszámítása. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük, felidézem a sűrűségfüggvényről, illetve a velük való számolásról szóló legfontosabb tanult eredményeket.

Többváltozós sűrűségfüggvények legfontosabb tulajdonságai.

Többváltozós sűrűségfüggvény definiciója. *Legyen $F(x_1, \dots, x_k)$ egy k-változós eloszlásfüggvény. Azt mondjuk, hogy ennek az eloszlásfüggvénynek az $f(x_1, \dots, x_k)$ függvény a sűrűségfüggvénye, ha teljesül az*

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k$$

azonosság minden valós $x_1, \dots, x_k$ szám-k-asra.

Ha egy $(\xi_1, \dots, x_k)$ véletlen vektornak $F(x_1, \dots, x_k)$ az eloszlásfüggvénye, és az $f(x_1, \dots, x_k)$ függvény az $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvény sűrűségfüggvénye, akkor időnként azt mondjuk, hogy $f(x_1, \dots, x_k)$ a $(\xi_1, \dots, x_k)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye.

Természetesen, az egyváltozós esethez hasonlóan, magasabb dimenzióban sem létezik minden eloszlásfüggvénynek sűrűségfüggvénye. Másrészt az eloszlásfüggvényekhez hasonlóan a sűrűségfüggvényeknek is van jellemzése.

Sűrűségfüggvény jellemzése. *Egy $f(x_1, \dots, x_k)$ k-változós függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(x_1, \dots, x_k) \ge 0$ (majdnem) minden $(x_1, \dots, x_k)$ pontra, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k = 1.$$

Eloszlás és sűrűségfüggvény kapcsolata. *Az eloszlás és sűrűségfüggvény kölcsönösen meghatározzák egymást. Elég sima (elég sokszor differenciálható) $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvény $f(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye létezik, és az kiszámolható az*

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}$$

képlet segítségével.

A következő egyszerű állítás nagyon fontos lesz számunkra a későbbiekben.

Független valószínűségi változókból álló véletlen vektor sűrűségfüggvénye. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók $F_j(x)$ eloszlás és $f_j(x)$ sűrűségfüggvénnyel, $1 \le j \le k$. Ekkor a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye az*

$$F(x_1, \dots, x_k) = F(x_1) \cdots F(x_k)$$

és (létező) sűrűségfüggvénye az

$$f(x_1, \dots, x_k) = f(x_1) \cdots f(x_k)$$

függvény.

Ugyancsak fontos számunkra a következő eredmény, amely azt adja meg, hogy hogyan lehet kiszámolni sok minket érdeklő mennyiséget sűrűségfüggvények segítségével.

Véletlen vektor függvényei és azok várható értékének kiszámolása sűrűségfüggvény segítségével. *Legyen egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektornak $f(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye. Ekkor tetszőleges (Borel mérhető) halmazra a k-dimenziós térben*

$$P((\xi_1, \dots, \xi_k) \in B) = \left(\int \cdots \int \right)_B f(u_1, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k$$

Általánosabban, legyen $g(x_1, \dots, x_k)$ tetszőleges (mérhető) k-változós függvény. Ekkor

$$Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int \cdots \int g(u_1, \dots, u_k) f(u_1, \dots, u_k)\, du_1 \dots du_k,$$

ha az $Eg(\xi_1, \dots, \xi_k)$ várható érték létezik, (azaz véges szám).

Ahhoz, hogy a fenti eredményeket használni tudjuk, tudnunk kell többváltozós integrálokkal számolni. Ehhez egyrészt fontos a Fubini tétel, amely szerint többváltozós integrálokat ki lehet számolni szukcesszív egyváltozós integrálás segítségével. Matematikai képletben megfogalmazva:

$$\int \cdots \int f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k = \int \dots \left(\int \left(\int f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_k.$$

Másrészt szükségünk lesz az egyváltozós integrálok kiszámolásában fontos szerepet játszó helyettesítéses integrál többváltozós megfelelőjére. Ismertetem az utóbbi eredményt.

A következő problémával foglalkozunk. Ha adva van az n-dimenziós tér egy A tartományának szép, sima és invertálható $y_k = T_k(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le k \le n$, leképezése az n-dimenziós tér egy másik B tartományába, valamint egy

$$\int_B f(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n$$

alakú integrál a B tartományon, akkor hogyan tudjuk ezt az integrált átírni az $y_k = T_k(x_1,\dots,x_k)$, $k=1,\dots,n$, leképezések segítségével, mint egy alkalmas az A tartományon értelmezett függvény integrálját? Célunk az, hogy ily módon a vizsgálandó integrált egy könnyebben kezelhető integrállá alakítsuk át.

Annak érdekében, hogy az erre a kérdésre adott választ meg tudjam fogalmazni először felidézem egy sima transzformáció Jacobian-jának a definicióját.

Jacobian definiciója. *Legyen $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1\le k\le n$, az n-dimenziós tér egy tartományának sima transzformációja az n-dimenziós tér egy másik tartományába. Vezessük be a $\mathbf{T}=(T_1,\dots,T_n)$ jelölést. A $\mathbf{T}$ transzformáció $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))$ Jacobian-ja egy $(x_1,\dots,x_n)$ pontban a*

$$\left(\frac{\partial T_k(x_1,\dots,x_k)}{\partial x_l}\right), \quad 1\le l,k\le n,$$

$n\times n$-es (az $(x_1,\dots,x_n)$ pontban vett derivált) mátrix determinánsának az abszolut értéke.

(A Jacobian szemléletes tartalma: Ez adja meg, hogy az $(x_1,\dots,x_n)$ pont kis környezetének a térfogatát a $\mathbf{T}=(T_1,\dots,T_n)$ transzformáció hányszorosára nagyítja.)

Integráltranszformációról szóló tétel. *Legyen adva az n-dimenziós tér egy A tartományának egy sima $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1\le k\le n$, transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik B tartományába, amelyik invertálható, azaz az $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1\le k\le n$, egyenletrendszernek egyetlen $(x_1,\dots,x_n)\in A$ megoldása van minden $(y_1,\dots,y_n)\in B$ pontra. Legyen továbbá adva egy (integrálható) $f(y_1,\dots,y_n)$ függvény a B tartományon. Ekkor*

$$\begin{aligned}&\int_B f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n\\ &\qquad =\int_A f(T_1(x_1,\dots,x_n),\dots,T_n(x_1,\dots,x_n))\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))\,dx_1\dots dx_n,\end{aligned}$$

ahol $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))$ jelöli a $\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n)$ leképezés Jacobianját.

Rendezett minták eloszlása.

Ismertetem a valószínűségszámításban és matematikai statisztikában is fontos rendezett minták fogalmát, és bebizonyítok róluk egy egyszerű, de fontos eredményt.

Legyen adva független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $\xi_1,\dots,\xi_n$ sorozata. Egy ilyen sorozatot a matematikai statisztikában gyakran mintának is neveznek, arra utalva, hogy az gyakran egy statisztikai problémában megjelenő mérési sorozat eredményeként jelenik meg. Egy $\xi_1,\dots,\xi_n$ sorozat elemeinek $\xi_1^*\le\xi_2^*\le\dots\le\xi_n^*$ nagyság szerint rendezett felsorolását rendezett mintának nevezik. Az alábbi lemmában megadom egy rendezett minta elemeiből képzett véletlen vektor sűrűségfüggvényét, ha ismerjük a kiinduló független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sűrűségfüggvényét. Megjegyzem, hogy ha ez a sűrűségfüggvény létezik, akkor a kiinduló $\xi_1,\dots,\xi_n$ sorozat elemei egy valószínűséggel különböznek egymástól. Az alább ismertetett egyszerű eredmény a későbbiekben hasznos lesz számunkra.

Lemma rendezett minta eloszlásáról. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók a számegyenesen valamely $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Vegyük e valószínűségi változók $\xi_1^* < \xi_2^* < \cdots < \xi_n^*$ nagyság szerinti sorbarendezését, azaz a belőlük készített rendezett mintát. Ennek a $(\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*)$ véletlen vektornak van $g(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye, és azt a*

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \prod_{j=1}^{n} f(x_j), & \text{ha } x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \\ 0, & \text{ha az } x_1 < x_2 < \cdots < x_n \text{ egyenlőtlenségrendszer nem teljesül} \end{cases}$$

képlet adja meg.

Speciálisan, ha a ξ valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a számegyenes valamely B, $0 < \lambda(B) < \infty$ mérhető halmazán, ahol $\lambda(\cdot)$ a Lebesgue mértéket jelöli, akkor a belölük készített rendezett minta sűrűségfüggvénye $g(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{\lambda(B)}$, ha $x_1 < x_2, \cdots < x_n$, és $x_j \in B$ minden $1 \le j \le n$ indexre, és $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ egyébként.

Megjegyzés: A lemma speciális esetben azt állítja, hogy ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egyenletes eloszással valamely $[a, b]$ intervallumban, akkor a belőlük készített rendezett minta sűrűségfüggvénye $g(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{(b-a)^n}$, ha $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$, és $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ egyébként.

Bizonyítás: Azt kell belátni, hogy az n-dimenziós tér tetszőleges $C \subset R^n$ (mérhető) részhalmazára

$$P((\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*) \in C) = \int_C g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Elég ezt az azonosságot a $C \subset A$, $A = \{(x_1, \dots, x_n)\colon\ x_1 < x_2, \cdots < x_n\}$ alakú halmazokra belátni, mert $C \in R^n \setminus A$ esetén mind $P((\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*) \in C) = 0$, mind $\int_C g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 0$. Adva egy $C \subset A$ (mérhető) halmaz, vezessük be az $\{1, \dots, n\}$ halmaz $\pi \in \Pi_n$ permutációinak a halmazát, és legyen

$$C_\pi = \{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})\colon\ (x_1, \dots, x_n) \in C, \}$$

minden $\pi \in \Pi_n$ permutációra és $C \subset A$ halmazra. Definiáljuk a $\bar{C} = \bigcup\limits_{\pi \in \Pi_n} C_\pi$ halmazt. Ekkor

$$\{\omega\colon\ (\xi_1^*(\omega), \xi_2^*(\omega), \dots, \xi_n^*(\omega)) \in C\} = \{\omega\colon\ (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n)(\omega)) \in \bar{C}\},$$

a C_π halmazok diszjunktak különböző π permutációkra, és minden $C \subset A$ halmazra

$$\begin{aligned} \int_C g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n &= n! \int_C f(x_1) \dots f(x_n)\, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\bar{C}} f(x_1) \cdots f(x_n)\, dx_1 \dots dx_n = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in \bar{C}), \end{aligned}$$

továbbá $P((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \bar{C}) = P((\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*) \in C)$. Innen következik a lemma állítása az általános esetben. Mivel egy a B halmazon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\lambda(B)}$, ha $x \in B$, $f(x) = 0$ egyébként, innen következik a lemma második állítása is.

Független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegei, és kapcsolatuk rendezett mintákkal.

Felidézem az exponenciális eloszlásokról tanult legfontosabb eredményeket. Ezenkívül kiszámolom független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek együttes sűrűségfüggvényét. Ennek az eredménynek érdekes következményei vannak.

Exponenciális eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, ha $u \geq 0$, $f(u) = 0$, ha $u \leq 0$ alakú.*

Az exponenciális eloszlás fontos tulajdonsága az úgynevezett örökifjú tulajdonság. Ezt az egyszerű állítást fontossága miatt külön lemmában fogalmazom meg.

Lemma az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságáról. *Egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:*

$$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.

Bizonyítás. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \geq 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y | \xi > y) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

Az örökifjú tulajdonság szemléletes tartalma a következő. Tekintsünk egy személyt vagy tárgyat amelynek véletlen élettartamát egy ξ valószínűségi változó méri. Tekintsük a $\xi + y$ valószínűségi változó feltételes eloszlását azon feltétel mellett, hogy $\xi > y$, azaz annak feltételes valószínűségét, hogy egy személy vagy tárgy még legalább x ideig élni fog, feltéve, hogy megélte az y időpontot. Ha ez a feltételes eloszlás nem függ az y értéktől, akkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó teljesíti az örökifjú tulajdonságot. A fenti lemmában azt mutattuk meg, hogy az exponenciális eloszlású valószínűségi változók teljesítik az örökifjú tulajdonságot.

Be lehet látni, hogy az állítás megfordítása is igaz. Ha egy valószínűségi változó eloszlása teljesíti az örökifjú tulajdonságban megfogalmazott azonosságot minden $x > 0$ és $y > 0$ számra, akkor az exponenciális eloszlású. (A geometriai eloszlások teljesítik az örökifjú tulajdonság egy gyengített alakját. Ekkor is teljesül a $P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > y)$ azonosság, ha x és y csak nem-negatív egész értékeket vehetnek fel. Ez a feltétel az x és y számokról azonban ebben az esetben nem hagyható el.)

Az érdekesség kedvéért mutatok példát olyan eloszlásra, amelyben úgynevezett szuper örökifjú tulajdonság teljesül, azaz, ha egy ilyen életkor eloszlású személy megért egy adott kort, akkor a további várható élettartama nagyobb, mint eredetileg volt.

Példa a szuper örökifjú tulajdonságot teljesítő eloszlásra. *Létezik olyan ξ valószínűségi változó, amelyik teljesíti a következő szuper örökifjú tulajdonságot:*

$$P(\xi > x + y | \xi > y) > P(\xi > x)$$

minden $x > 0$ és $y > 0$ számra.

Bizonyítás. Legyen a ξ valószínűségi változó olyan, hogy $P(\xi > x) = e^{-\sqrt{x}}$, ha $x \ge 0$ és $P(\xi > x) = 1$, ha $x < 0$. Ekkor $P(\xi > x + y | x > y) = e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}$, ha $x > 0$, $y > 0$. Ezért elég megmutatni, hogy $e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} > e^{-\sqrt{y}}$, illetve hogy $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ez az egyenlőtlenség viszont (négyzetre emelés után) könnyen látható.

Parciális integrálással ki lehet számolni egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Valóban, parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\left(\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty u^2\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left[-u^2e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Hasonló módon ki tudjuk számolni egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó tetszőleges momentumát. Ezt a számolást azonban elhagyom. Viszont tárgyalom azt, hogy független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók összegének mi a sűrűségfüggvénye. Ezt a sűrűségfüggvényt ki lehet számolni konvolució segítségével. Tanulságos lehet az ezt követő feladat megoldása is, amelyben ismét független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeit tekintem. Itt a részletösszegek együttes eloszlásának a sűrűségfüggvényét számolom ki. E probléma megoldásában nagyon hasznos szerepet játszik a többváltozós integrálok transzformációjáról szóló korábban megfogalmazott eredmény. Az említett problémák megoldásaianak további érdekes következményei vannak, és ezeket is tárgyalni fogom.

Tétel független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényről. *Legyenek ξ_1 és ξ_2 független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. A $\xi_1 + \xi_2$ véletlen összeg sűrűségfüggvénye $f_2(x) = \lambda^2 xe^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f_2(x) = 0$, ha $x < 0$.*

Általánosabban, legyenek $\xi_1, \dots \xi_n$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor a $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ véletlen összeg sűrűségfüggvénye $f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $f_n(x) < 0$, ha $x < 0$.

Bizonyítás: Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\cdots*f}_{n\text{-szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nulla, az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)>0$ minden y-ra nulla, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ integrandus csak $0\le y\le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $x<0$ esetén $f_2(x)=f*f(x)=0$, és

$$\begin{aligned} f_2(x)=f*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\ &=\int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy=\lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x\ge 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan, ha $f_n(x)=\underbrace{f*\cdots*f}_{n\text{-szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots+\xi_n$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_n(x)=0$ minden $n\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítom, hogy $f_n(x)=\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{n-1}*f(x)=f_n(x)$ a fent definiált f_n függvényekkel. Viszont

$$\begin{aligned} f_{n-1}*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda^{n-1}\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\ &=\lambda^n e^{-\lambda x}\int_0^x \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\,dy=e^{-\lambda x}\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{ha } x\ge 0. \end{aligned}$$

Másrészt $f_n(x)=0$, ha $x\le 0$.

Független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeiből álló vektor együttes sűrűségfüggvényének a kiszámítása. *Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots$, független exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda>0$ paraméterrel, és tekintsük az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j$, $k=1,2,\dots$, részletösszegeket. Az $(S_1,\dots,S_{n+1})$ véletlen vektornak van $g(u_1,\dots,u_{n+1})$ sűrűségfüggvénye, és az a $g(u_1,\dots,u_{n+1})=\lambda^{n+1}e^{-\lambda u_{n+1}}$ függvény, ha $0\le u_1<\cdots<u_{n+1}$, és $g(u_1,\dots,u_{n+1})=0$ egyébként.*

Bizonyítás. A fent megfogalmazott állítás igazolható, mivel ismerjük a $(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvényét, és e sűrűségfüggvény segítségével fel tudjuk írni a keresett eloszlásfüggvény értékeit megadó $P(S_1<x_1,\dots,S_{n+1}<x_{n+1})$ valószínűségeket alkalmas integrál formájában. Ezeket az integrálokat átírva megfelelő koordinátatranszformáció segítségével megkapjuk a kívánt eredményt.

A $(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye a $h(v_1,\dots,v_{n+1})=\prod\limits_{j=1}^{n+1}k(v_j)$ függvény, ahol $k(v)=\lambda e^{-\lambda v}$, ha $v\ge 0$, és $k(v)=0$, ha $v<0$. Továbbá,

$$\begin{aligned} P(S_1<x_1,\dots,S_{n+1}<x_{n+1})&=P((\xi_1,\dots,\xi_{n+1})\in A_{n+1})\\ &=\int_{A_{n+1}} h(v_1,\dots,v_{n+1})\,dv_1\dots dv_{n+1}, \end{aligned}$$

ahol $A_{n+1} = A_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \{(v_1, \dots, v_{n+1})\colon\ v_1 < x_1, v_1 + v_2 < x_2, \dots, v_1 + \dots + v_{n+1} < x_{n+1}\}$. Ezután alkalmazzuk az $u_j = v_1 + \dots + v_j$, $1 \le j \le n+1$, transzformációt. E transzformáció Jacobianja 1, másrészt $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \prod\limits_{j=1}^{n+1} k(u_j - u_{j-1})$, $u_0 = 0$ választással, ahonnan $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = g(u_1, \dots, u_{n+1})$, azaz $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-u_{n+1}}$, ha $0 < u_1 < \dots < u_{n+1}$ mert ez felel meg a $v_j > 0$, $1 \le j \le n+1$ feltételnek, és $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = g(u_1, \dots, u_{n+1}) = 0$, egyébként.

Meg kell még gondolni, hogy mi az A_{n+1} halmaz B_{n+1} inverze a fenti (invertálható) transzformáció esetén, mert ez a transzformált integrál integrálási tartománya. Egyszerű számolás mutatja, hogy $B_{n+1} = \{(u_1, \dots, u_{n+1})\colon\ u_1 < x_1, \dots, u_{n+1} < x_{n+1}\}$.

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P(S_1 < x_1, \dots, S_{n+1} < x_{n+1}) \\ &\qquad = \int_{\{(u_1, \dots, u_{n+1})\colon\ u_1 < x_1, \dots, u_{n+1} < x_{n+1}\}} g(u_1, \dots, u_{n+1})\, du_1 \dots du_n, \end{aligned}$$

és ez volt a bizonyítandó állítás.

Tétel független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek és rendezett minták eloszlásainak a kapcsolatáról. *Legyenek adva független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, és egy tőlük független η valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. (Az η valószínűségi változó eloszlása megegyezik n független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlásával.) Tekintsük a $\xi_1, \dots \xi_n$ valószínűségi változókból készített $\xi_1^* < \dots < \xi_n^*$ rendezett mintát, és definiáljuk a $(T_1, \dots, T_n) = (\eta \xi_1^*, \dots, \eta \xi_n^*)$ véletlen vektort, és legyen $\eta = T_{n+1}$. A*

$$(T_1, \dots, T_n, T_{n+1}) = (\eta \xi_1^*, \dots, \eta \xi_n^*, \eta)$$

véletlen vektor eloszlása megegyezik $n+1$ darab független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó $(S_1, \dots, S_{n+1})$ részletösszegeiből álló véletlen vektor eloszlásával.

A fenti állításnak megfogalmazom egy következményét, amely valójában ekvivalens az eredeti állítással.

Következmény. *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Definiáljuk az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $1 \le k \le n+1$, részletösszegeket és a $(Z_1, \dots, Z_n) = \left(\frac{S_1}{S_{n+1}}, \dots, \frac{S_n}{S_{n+1}}\right)$ véletlen vektort. A $(Z_1, \dots, Z_n)$ véletlen vektor független az S_{n+1} valószínűségi változótól, és eloszlása megegyezik egy n elemű, független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változót tartalmazó sorozatból készített rendezett minta eloszlásával.*

A lemma bizonyítása. A $(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*, \eta)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye

$$g(v_1, \dots, v_{n+1}) = \lambda^{n+1} v_{n+1}^n e^{-\lambda v_{n+1}}, \quad \text{ha } 0 \le v_1 < v_2 < \dots < v_n \le 1,\ v_{n+1} \ge 0,$$

és $g(v_1,\dots,v_{n+1})=0$ egyébként. Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(T_1<x_1,\dots,T_n<x_n,T_{n+1}<x_{n+1})&=P(\eta\xi_1^*<x_1,\dots,\eta\xi_n^*<x_n,\eta<x_{n+1})\\&=\int h(v_1,\dots,v_{n+1})g(v_1,\dots,v_{n+1})\,dv_1\dots dv_{n+1},\end{aligned}$$

ahol

$$h(v_1,\dots,v_{n+1})=1,\quad \text{ha } v_jv_{n+1}<x_j,\ 1\le j\le n,\quad \text{és } v_{n+1}<x_{n+1},$$

és $h(v_1,\dots,v_{n+1})=0$ egyébként. Írjuk át ezt az integrált az $u_j=v_{n+1}v_j$, $1\le j\le n$, $u_{n+1}=v_{n+1}$ (invertálható) transzformáció segítségével. Ennek a transzformációnak a Jacobian-ja $|u_{n+1}^{-n}|=u_{n+1}^{-n}$, ha $u_{n+1}>0$. Ugyanis $v_j=\frac{u_j}{u_{n+1}}$, $1\le j\le n$, $v_{n+1}=u_{n+1}$, ezért $\frac{\partial v_j}{\partial u_j}=\frac{1}{u_{n+1}}$, $1\le j\le n$, $\frac{\partial v_j}{\partial u_{n+1}}=-\frac{u_j}{u_{n+1}^2}$, $1\le j\le n$, $\frac{\partial v_{n+1}}{\partial u_{n+1}}=1$, és $\frac{\partial v_j}{\partial u_k}=0$ egyébként. Innen könnyen látható, hogy a Jacobiant definiáló mátrix determinánsa egyenlő a mátrix diagonális elemeinek szorzatával, ami u_{n+1}^{-n}-nel egyenlő.

Ezt felhasználva a fenti azonosságot a következőképp írhatjuk át.

$$\begin{aligned}&P(T_1<x_1,\dots,T_n<x_n,T_{n+1}<x_{n+1})\\&\quad=\int \bar h(u_1,\dots,u_{n+1})\bar g(u_1,\dots,u_{n+1})u_{n+1}^{-n}\,du_1\dots du_{n+1}\\&\quad=\int_{\{(u_1,\dots,u_{n+1}):\ u_1<x_1,\dots,u_{n+1}<x_{n+1},\ 0\le u_1<\dots<u_{n+1}\}}\lambda^{n+1}e^{-\lambda u_{n+1}}\,du_1\dots du_{n+1},\end{aligned}$$

ahol $\bar h(u_1,\dots,u_{n+1})=1$, ha $u_j<x_j$, $1\le j\le n+1$, és $\bar h(u_1,\dots,u_{n+1})=0$ egyébként, $\bar g(u_1,\dots,u_{n+1})=\lambda^{n+1}u_{n+1}^ne^{-\lambda u_{n+1}}$, ha $0\le u_1<u_2<\dots<u_n<u_{n+1}$, és $\bar g(u_1,\dots,u_{n+1})=0$ egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $(T_1,\dots,T_n,T_{n+1})$ vektor sűrűségfüggvénye $\lambda^{n+1}e^{-\lambda u_{n+1}}$, ha $0\le u_1<\dots<u_{n+1}$, és nulla egyébként. Összehasonlítva ezt a relációt a *független exponenciális eloszlású valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének a kiszámításánál* kapott képlettel megkapjuk a Tétel állítását.

A következmény bizonyítása. Tekintsünk $\xi_1,\dots,\xi_{n+1}$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változókat λ paraméteterrel, ezek $S_k=\sum\limits_{j=1}^k\xi_j$, $1\le k\le n+1$, részletösszegeit, valamint független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $(Z_1,\dots,Z_n)$ valószínűségi változókat, egy tőlük független, és az S_{n+1} valószínűségi változóval megegyező eloszlású η valószínűségi változót. Vezessük be a $T_k=\eta Z_k$, $k=1,\dots,n$, és $T_{n+1}=\eta$ valószínűségi változókat. Láttuk, hogy az $(S_1,\dots,S_{n+1})$ és $(T_1,\dots,T_{n+1})$ véletlen vektorok eloszlása megegyezik. De ebből az is következik, hogy az $\left(\frac{S_1}{S_{n+1}},\dots,\frac{S_n}{S_{n+1}},S_{n+1}\right)$ és $\left(\frac{T_1}{T_{n+1}},\dots,\frac{T_n}{T_{n+1}},T_{n+1}\right)=(Z_1,\dots,Z_n,\eta)$ véletlen vektorok eloszlása is megegyezik. Azt használjuk fel, hogy egy véletlen vektor eloszlása meghatározza e véletlen vektor függvényeinek az eloszlását is.

Poisson folyamatok, független egyforma eloszlású valószínűségi változók és rendezett minták közötti kapcsolatat.

Bebizonyítok néhány állítást, amelyek megmutatják, hogy a Poisson folyamatok, rendezett minták és független exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek viselkedése között szoros kapcsolat van. Ezen eredmények következményeként megadom a Poisson folyamatok egy konstrukcióját független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek a segítségével. A következő eredményt fogom bizonyítani.

Tétel Poisson folyamatok konstrukciójáról exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek segítségével. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Vezessük be az $S_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1, 2, \dots,$ $S_0 = 0$, részletösszegeket, és definiáljuk segítségükkel a következő $X(t,\omega)$, $0 \le t < \infty$, sztochasztikus folyamatot.*

$$X(t,\omega) = k, \quad \textit{ha } S_k(\omega) \le t < S_{k+1}(\omega), \quad 0 \le t < \infty.$$

Ez az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat Poisson folyamat λ paraméterrel.

Ez az eredmény jól ismert az irodalomban. A hagyományos indoklás felhasználja a valószínűségszámítás néhány mély eredményét (Markov folyamatok, erős Markov tulajdonság). Itt egy olyan bizonyítást ismertetek, amely az eddig tanult ismereteken és bizonyos valószínűségek kiszámításán alapul. A bizonyítás során kapott eredmények Poisson eloszlások, exponenciális eloszlások és rendezett minták között fejeznek ki önmagukban is érdekes kapcsolatot.

Lemma Poisson és polinomiális eloszlás közötti kapcsolatról. *Legyenek ξ_j, $j = 1, \dots, r$, független Poisson eloszlású valószínűségi változók λ_j, $1 \le j \le r$, paraméterekkel. Ekkor*

$$P\left(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^{r} \xi_j = n\right) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left(\sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s\right)^{k_j}}.$$

Azaz a $\xi_1, \dots, \xi_r$ vektor feltételes eloszlása a $\sum\limits_{j=1}^{r} \xi_j = n$ feltétel mellett a polinomiális eloszlás n és $p_j = \frac{\lambda_j}{\sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s}$, $1 \le j \le r$, paraméterekkel.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} P\left(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^{r} \xi_j = n\right) &= \frac{P(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r)}{P\left(\sum_{j=1}^{r} \xi_j = n\right)} \\ &= \frac{P(\xi_1 = k_1) \cdots P(\xi_r = k_r)}{P\left(\sum_{j=1}^{r} \xi_j = n\right)}, \end{aligned}$$

mert $\{\omega\colon \xi_1(\omega)=k_1,\dots,\xi_r(\omega)=k_r)\}\subset\{\omega\colon \sum_{j=1}^r \xi_j(\omega)=n\}$, és a $\xi_1,\dots,\xi_r$ valószínűségi változók függetlenek. Innen

$$P\left(\xi_1=k_1,\dots,\xi_r=k_r\middle|\sum_{j=1}^r \xi_j=n\right)=\frac{\prod\limits_{j=1}^r \frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda_j}}{\frac{\left(\sum\limits_{s=1}^r \lambda_s\right)^{k_1+\dots+k_r}e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_r)}}{n!}}$$
$$=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}\prod_{j=1}^r \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left(\sum\limits_{s=1}^r \lambda_s\right)^{k_j}}.$$

Megfogalmazom a fenti lemma egy következményét. Annak érdekében hogy ezt megtehessem, először bevezetem az empirikus eloszlásfüggvény definicióját.

Empirikus eloszlásfüggvény definiciója. *Legyen adva n független egyenletes eloszlású $\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega)$ valószínűségi változó valamely $[0,T]$ intervallumon. E valószínűségi változók empirikus eloszlásfüggvénye az*

$$F_n(t,\omega)=\frac{1}{n}\times \textit{azon } k,\ 1\le k\le n \textit{ indexek száma, amelyekre } \xi_k(\omega)<t,$$

$0\le t\le T$, *(véletlen) függvény.*

Megfogalmazom a lemma egy következményét.

A Poisson és polinomiális eloszlás közötti kapcsolatról szóló lemma következménye. *Legyen adva egy $Y(t,\omega)$ Poisson folyamat valamilyen $\lambda>0$ paraméterrel egy $[0,T]$ intervallumon és független, a $[0,T]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók n-elemű $\xi_1,\dots,\xi_n$ sorozata. Tekintsük e valószínűségi változók $F_n(t,\omega)$ empirikus eloszlásfüggvényét. Az $Y(t,\omega)$ Poisson folyamat feltételes véges dimenziós eloszlásai feltéve, hogy $Y(T,\omega)=n$ megegyeznek az $nF_n(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásaival, azaz*

$$\begin{aligned}&P(Y(t_1,\omega)<j_1,\dots,Y(t_k,\omega)<j_k|Y(T,\omega)=n)\\&\qquad=P(nF_n(t_1,\omega)<j_1,\dots,nF_n(t_k,\omega)<j_k)\end{aligned}$$

minden $0\le t_1<\dots<t_k\le T$ indexekre és $j_1,\dots,j_k$ egész számokra.

Bizonyítás. Rögzítsünk valamely $0=t_0\le t_1<t_2<\dots<t_k=T$ számokat. Elég belátni, hogy az $Y(t_j,\omega)-Y(t_{j-1},\omega)$, $1\le j\le k$, különbségek feltételes együttes eloszlása feltéve, hogy $Y(T,\omega)=n$ megegyezik az $nF_n(t_j,\omega)-nF_n(t_{j-1},\omega)$, $1\le j\le k$, különbségek együttes eloszlásával. Viszont az $Y(t_j,\omega)-Y(t_{j-1},\omega)$ valószínűségi változók független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\lambda(t_j-t_{j-1})$ paraméterrel. Az $Y(T,\omega)=n$ feltétel azt jelenti, hogy e valószínűségi változók összege n. Ezért a Poisson és polinomiális eloszlás közötti kapcsolatról szóló lemma alapján az $Y(t_j,\omega)-Y(t_{j-1},\omega)$

valószínűségi változók feltételes együttes eloszlása feltéve, hogy $Y(T,\omega) = n$ polinomiális eloszlás n és $p_j = \frac{t_j - t_{j-1}}{T}$, $1 \le j \le k$, paraméterekkel. Nyilvánvalóan az $nF_n(t_j,\omega) - nF_n(t_{j-1},\omega)$, $1 \le j \le k$, vektornak is ez az eloszlása.

Megjegyzés. A lemma következménye megfogalmazható a következő módon. Legyen $Y(T,\omega)$ Poisson folyamat valamilyen λ paraméterrel a $[0,T]$ intervallumban. A Poisson folyamat pontjainak a feltételes eloszlása $Y(T,\omega) = n$ feltétel mellett megegyezik n független, a $[0,T]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó által meghatározott rendezett minta eloszlásával.

A következő lemma arról szól, hogy ha vesszük független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeit, és csak azokat a részletösszegeket őrízzük meg, amelyek értéke kisebb, mint egy előre rögzített x szám, akkor a megtartott tagok száma Poisson eloszlású.

Lemma független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegei és Poisson eloszlások közötti kapcsolatról. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda > 0$ paraméterrel. Definiáljuk ezek $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$, részletösszegeit, és vegyünk valamely $x > 0$ számot. Annak a valószínűsége, hogy mind az $S_{n+1} > x$, mind az $S_n \le x$ események bekövetkeznek $\frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}$ minden $n = 0, 1, \dots$ számra. Ez azt jelenti, hogy az $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, ... (véletlen) sorozatnak a $[0,x]$ intervallumba eső pontjainak száma Poisson eloszlású λx paraméterrel.*

Bizonyítás: $P(S_{n+1} > x, S_n \le x) = P(S_n \le x) - P(S_{n+1} \le x) = \int_0^x [f_n(u) - f_{n+1}(u)]\,du$, ahol $f_n(u)$ jelöli az S_n valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Innen, felhasználva, hogy ismerjük S_n és S_{n+1} sűrűségfüggvényét kapjuk, hogy

$$P(S_{n+1} > x,\, S_n \le x) = \int_0^x \frac{\lambda^n u^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-\lambda u}\,du - \int_0^x \frac{\lambda^{n+1} u^n}{n!} e^{-\lambda u}\,du,$$

ha $n \ge 1$. Parciális integrálással ($f'(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ és $g(u) = \frac{\lambda^n u^n}{n!}$ választással) kapjuk, hogy

$$\int_0^x \frac{\lambda^{n+1} u^n}{n!} e^{-\lambda u}\,du = -\frac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda x} + \int_0^x \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u}\,du.$$

A fenti két azonosságból következik a lemma állítása $n \ge 1$ esetben. Ha $n = 0$, akkor $P(S_0 < x) - P(S_1 < x) = 1 - \int_0^x \lambda e^{\lambda u}\,du = e^{-\lambda x}$, tehát a lemma állítása ekkor is igaz.

Az eddig bebizonyított eredmények is mutatják, hogy az a független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegei segítségével definiált sztochasztikus folyamat, amelyről be akarjuk látni, hogy Poisson folyamat sok olyan tulajdonsággal rendelkezik, mint amit elvárunk. Ahhoz azonban, hogy állításunkat bebizonyítsuk még egy eredményre van szükségünk független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeiről. Tudjuk, hogy az olyan részletösszegek száma, amelyek egy $[0,T]$ intervallumba esnek Poisson eloszlású. Ezenkívül azt is megmutattuk, hogy ha vesszük e valószínűségi változók $n+1$-ik S_{n+1} részletösszegét, akkor a kisebb indexű részletösszegek eloszlása megegyezik egy rendezett minta eloszlásával a $[0, S_{n+1}]$ véletlen intervallumban. Ezek az ismeretek azonban nem elegendőek a számunkra. Hasonló eredményre van szükségünk a részletösszegek egy nem véletlen intervallumba eső elemeinek az eloszlásáról. Ilyen állítást fogalmaz meg a következő lemma.

Lemma független exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek az eloszlásáról. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda > 0$ paraméterrel, és tekintsük az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1, 2, \dots,$ $S_0 = 0$, részletösszegeket. Rögzítsünk egy $A > 0$ és egy n pozitív egész számot, és definiáljuk segítségükkel a $C = C(A, n)$, $C = \{\omega\colon\ S_n(\omega) \le A < S_{n+1}(\omega)\}$ eseményt. Az $(S_1, \dots, S_n)$ véletlen vektor feltételes eloszlásának feltéve a C eseményt van $f(u_1, \dots, u_n)$ sűrűségfüggvénye, és ez az*

$$f(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{A^n}, & \textit{ha} \quad 0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_n \le A, \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

függvény. Ez azt jelenti, hogy

$$P(S_1 < x_1, S_2 < x_2, \dots, S_n < x_n | C) = \int_{\{(u_1, \dots, u_n)\colon\ u_1 < x_1, \dots, u_n < x_n\}} f(u_1, \dots, u_n)\, du_1 \dots du_n$$

minden $x_1, \dots, x_n$ valós szám-n-esre ezzel az $f(u_1, \dots, u_n)$ függvénnyel.

Megjegyzés. Tekintsük független, (azonos paraméterű) exponenenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek azokat a tagjait, amelyek egy $[0, x]$ intervallumba esnek. A fenti lemma azt állítja, hogy azon feltétel mellett, hogy ebbe az intervallumba pontosan n részletösszeg esik, e részletösszegek együttes eloszlása megegyezik egy a $[0, x]$ intervallumban vett független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókból készített rendezett minta eloszlásával.

Bizonyítás: Rögzítsünk bizonyos $0 < x_1, \dots, x_n \le A$ számokat, definiáljuk a $D = D(x_1, \dots, x_n) = \{\omega\colon\ S_1(\omega) < x_1, \dots, S_n(\omega) < x_n\}$ eseményt, és számoljuk ki a $P(D \cap C)$ valószínűséget. (E kifejezésben $C = \{\omega\colon\ S_n(\omega) \le A < S_{n+1}(\omega)\}$.) A

$$\begin{aligned} P(D \cap C) &= \int_B f_0(u_1, \dots, u_n) \lambda^{n+1} e^{-\lambda v}\, du_1 \dots du_n\, dv \\ &= \int_{B_0} f_0(u_1, \dots, u_n)\, du_1 \dots du_n \int_A^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda v}\, dv, \end{aligned}$$

azonosság érvényes, ahol

$$f_0(u_1, \dots, u_n) = 1, \text{ ha } 0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_n, \quad f_0(u_1, \dots, u_n) = 0 \text{ egyébként},$$

$$B = B(x_1, \dots, x_n, v) = \{(u_1, \dots, u_n, v)\colon\ u_1 < x_1, \dots, u_n < x_n, v > A)\},$$

és

$$B_0 = B_0(x_1, \dots, x_n) = \{(u_1, \dots, u_n)\colon\ u_1 \le x_1, \dots, u_n < x_n)\}.$$

Ugyanis a $P(D \cap C)$ valószínűség kiszámításához az $(S_1, \dots, S_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvényét kell integrálni az $U = \{(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})\colon\ u_1 < x_1, \dots, u_n < x_n, A < u_{n+1} < \infty\}$ halmazon. Ez a sűrűségfüggvény $f_0(u_1, \dots, u_n)\lambda^{n+1}e^{-\lambda u_{n+1}}$-gyel egyenlő az U halmazon a *független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek eloszlásáról* szóló lemma alapján. Az így kapott integrál pedig faktorizálható. Ez van felírva az azonosság második sorában.

Speciálisan $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = A$ választással $P(C) = \frac{A^n}{n!}\int_A^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda v}\,dv$, mert

$$\int_{B_0(A,\dots,A)} f_0(u_1, \dots, u_n)\,du_1 \dots du_n = \frac{A^n}{n!}.$$

(Az integrálást elvégezve megkapjuk a $P(C) = \frac{(\lambda A)^n}{n!}e^{-\lambda A}$ formulát, azaz a független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegei és Poisson eloszlások közötti kapcsolatról szóló lemma egy másik bizonyítását.)

Innen

$$\begin{aligned}
P(S_1 < x_1, S_2 < x_2, \dots, S_n < x_n | C) &= P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{n!}{A^n}\int_{u_1 < x_1, \dots, u_n < x_n} f_0(u_1, \dots, u_n)\,du_1 \dots du_n \\
&= \int_{u_1 < x_1, \dots, u_n < x_n} f(u_1, \dots, u_n)\,du_1 \dots du_n,
\end{aligned}$$

és ezt kellett belátnunk.

A már bizonyított eredmények segítségével meg tudjuk mutatni, hogy független, exponenciális eloszlású valószínűségi változok segítségével valóban Poisson folyamatot definiáltunk az általunk javasolt módon.

Annak igazolása hogy az exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek segítségével definiált konstrukció valóban Poisson folyamatot definiál. Annak igazolásához, hogy a definiált $X(t, \omega)$ folyamat teljesíti a Poisson folyamatok definiciójának (iii) feltételét a trajektóriák viselkedéséről elég azt megmutatni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\omega) = \infty$ az $S_k(\omega)$ részletösszegekre. Ez azonnal következik például a Borel–Cantelli lemmából, mert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi_k > x) = \infty$ minden $x > 0$ számra, így majdnem minden ω-ra végtelen sok olyan k index van, amelyre $\xi_k(\omega) > x$.

Az, hogy az $X(t, \omega)$ folyamat teljesíti a Poisson folyamatok (i) és (ii) tulajdonságát ekvivalens azzal az állítással, hogy akárhogy választunk valamely $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ pontokat a számegyenesen és egy λ paraméterű $Y(t, \omega)$, $t > 0$, Poisson folyamatot, (tudjuk, hogy ilyen Poisson folyamat létezik), az $(X(t_1, \omega), \dots, X(t_k, \omega))$ és $(Y(t_1, \omega), \dots, Y(t_k, \omega))$ véletlen vektorok eloszlása megegyezik. Tudjuk, hogy mind az $X(t_k, \omega)$ mind az $Y(t_k, \omega)$ valószínűségi változó Poisson eloszlású λt_k paraméterrel.

Ezért a bizonyítás befejezéséhez elég azt megmutatni, hogy tetszőleges n nem-negatív egész számra és $1 \le j_1 \le n$, ... , $1 \le j_{k-1} \le n$ számokra

$$\begin{aligned} &P(X(t_1,\omega) < j_1, \dots, X(t_{k-1},\omega) < j_{k-1} | X(t_k,\omega) = n) \\ &\quad = P(Y(t_1,\omega) < j_1, \dots, Y(t_{k-1},\omega) < j_{k-1} | Y(t_k,\omega) = n). \end{aligned}$$

A független exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeinek az eloszlásáról szóló lemma alapján a bizonyítandó azonosság baloldalán álló kifejezést kiszámíthatjuk a következő módon. Vegyünk n független egyenletes eloszlású $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változót a $[0, t_k]$ intervallumban, és készítsük el belőlük az $\eta_1^* < \eta_2^* < \cdots < \eta_n^*$ rendezett mintát. Ekkor

$$\begin{aligned} &P(X(t_1,\omega) < j_1, \dots, X(t_{k-1},\omega) < j_{k-1} | X(t_k,\omega) = n) \\ &\quad = P(S_{j_1}(\omega) \ge t_1, \dots, S_{j_{k-1}}(\omega) \ge t_{k-1} | S_n(\omega) \le t_k < S_{n+1}) \\ &\quad = P(\eta_{j_1}^*(\omega) \ge t_1, \dots, \eta_{j_{k-1}}^*(\omega) \ge t_{k-1}). \end{aligned}$$

Jelölje $F_n(t,\omega)$ az $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók empirikus eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$\begin{aligned} &\{\omega\colon \eta^* j_1(\omega) \ge t_1, \dots, \eta_{j_{k-1}}^*(\omega) \ge t_{k-1}\} \\ &\quad = \{\omega\colon nF_n(t_1,\omega) < j_1, \dots, nF_n(t_{k-1},\omega) < j_{k-1}\}, \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P(X(t_1,\omega) < j_1, \dots, X(t_{k-1},\omega) < j_{k-1} | X(t_k,\omega) = n) \\ &\quad = P(nF_n(t_1,\omega) < j_1, \dots, nF_n(t_{k-1},\omega) < j_{k-1}). \end{aligned}$$

Viszont a Poisson és polinomiális eloszlás közötti kapcsolatról szóló lemma következménye alapján az utolsó azonosság jobboldala egyenlő a bizonyítandó azonosság jobboldalával. Innen következik a bizonyítandó azonosság. Ezzel beláttuk, hogy a konstruált sztochasztikus folyamat valóban Poisson folyamat.

1. megjegyzés. A bebizonyított eredmény szemléletes tartalma a következő. Tekintsük a következő két véletlen pontrendszert:

a) Ledobunk a $[0, T]$ intervallumra egymástól függelenül véletlen sok pontot egyenletes eloszlással a $[0, T]$ intervallumban. A ledobott pontok száma legyen Poisson eloszlású λT paraméterrel.
b) Vesszük független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeit, és e véletlen összegek közül megtartjuk azokat, amelyek értéke kisebb, mint T.

Az a) és b) pontban definiált két véletlen pontrendszer eloszlása megegyezik.

2. megjegyzés. Az 1. megjegyzésben megfogalmazott állítás szemléletesen is jól megmagyarázható. A b) pontban definiált pontrendszer eloszlásának viselkedését kell megérteni. Ezt az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságának a felhasználásával tehetjük meg. Osszuk fel a $[0,T]$ intervallumot kis ΔT hosszú diszjunkt intervallumok uniójára. Ekkor az örökifjú tulajdonság miatt a vizsgált pontrendszert jó közelítéssel úgy jellemezhetjük, hogy az egyes ΔT hosszú intervallumokba egymástól függetlenül $\lambda\Delta T$ valószínűséggel kerülnek pontok, és minden ilyen intervallumba legfeljebb egy pont kerül. Innen következik a *Határeloszlástétel Poisson határeloszlással* eredmény alapján, hogy a $[0,T]$ intervallumba eső pontok száma Poisson eloszlású λT paraméterrel. Továbbá ama feltétel mellett, hogy pontosan n pont esik ebbe az intervallumba, ezen n pont minden elhelyezkedése egyformán valószínű. Ezért e pontrendszer eloszlása ama feltétel mellett, hogy n elemből áll olyan, mint n független, a $[0,T]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta eloszlása.

Végül megadom a Poisson folyamatok egy jellemzését a bizonyított eredmények alapján.

Poisson folyamatok egy jellemzése. *Legyen $X(t,\omega)$ egy Poisson folyamat λ paraméterrel. Ekkor egy valószínűséggel $X(0,\omega)=1$, és az $X(t,\omega)$ sztochaszikus folyamat trajektóriái olyan monoton növekvő, jobbról folytonos, egész szám értékű függvények, amelyeknek minden véges intervallumban véges sok ugráshelye van, és e trajektóriák minden ugráshelyen 1-et ugranak. Ezenkívül az egymást követő ugráshelyek közötti intervallumok hosszai egymástól független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.*

Az, hogy a Poisson folyamat trajektóriái teljesítik a *Poisson folyamatok egy jellemzésé*ben előírt tulajdonságokat egyszerűen ellenőrizhető például a $P(X(t,\omega)<\infty)=1$ relációból és a Poisson és polinomiális eloszlás közötti kapcsolatról szóló lemma következményéből. (Azt kell ellenőrizni, hogy a Poisson folyamat minden ugráspontban csak egyet ugrik.) Láttuk azt is, hogy van olyan λ paraméterű Poisson folyamat, amelyre az ugráshelyek közötti intervallumok hosszai független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók λ paraméterrel. Annak igazolásához, hogy minden λ paraméterű Poisson folyamat rendelkezik ezzel a tulajdonsággal azt kell megmutatni, hogy egy Poisson folyamat ugráspontjai közötti intervallumok hosszainak együttes eloszlását meghatározzák a folyamat véges dimenziós eloszlásai. Ez következik az alábbi lemmából.

Lemma egyszerű trajektóriájú sztochasztikus folyamatok tulajdonságairól. *Legyen egy $X(t,\omega)$, $t>0$, sztochasztikus folyamat olyan, hogy $X(0,\omega)=1$, majdnem minden trajektóriája jobbról folytonos, egész értékű monoton növekvő függvény, amelynek minden intervallumban véges sok ugráshelye van, és minden ugrás értéke 1. Legyenek $U_1(\omega)<U_2(\omega)<\cdots$ az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat ugráshelyei növekvő sorrendben. Akkor az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai meghatározzák az $U_1(\omega)$, $U_2(\omega)$, … sorozat véges dimenziós eloszlásait.*

A lemma bizonyítása. Vegyük észre, hogy $\{\omega\colon U_1(\omega)\le t_1, U_2(\omega)\le t_2,\dots,U_k(\omega)\le t_k\}=\{\omega\colon X(t_1,\omega)\ge 1, X(t_2,\omega)\ge 2,\dots,X(t_k,\omega)\ge k\}$ minden $k=1,2,\dots$ és $t_1\ge 0$, $t_2\ge 0$, … $t_k\ge 0$ számsorozatra. (Azt mondjuk, hogy $U_j(\omega)=\infty$, ha nincsen j-ik ugráspont.) Ezért $P(U_1(\omega)\le t_1, U_2(\omega)\le t_2,\dots,U_k(\omega)\le t_k)=P(X(t_1,\omega)\ge 1, X(t_2,\omega)\ge 2,\dots,X(t_k,\omega)\ge k)$. Mivel ezek a valószínűségek (minden $t_1,\dots,t_k$

számra) meghatározzák az $U_1(\omega),\dots,U_k(\omega)$ véletlen vektor eloszlását, innen következik a lemma állítása.

Kiegészítés: A Poisson határeloszlással rendelkező határeloszlástétel bizonyítása

Ennek az előadás fő részében kimondott tételnek ismertetem egy perturbációs elven alapuló bizonyítását. Megmutatom, hogy az egyes soraiban független, Poisson eloszlású valószínűségi változókat tartalmazó szériasorozatokra a szériasorozatban szereplő Poisson eloszlású valószínűségi változókra tett enyhe feltételek mellett igaz a határeloszlástétel, és azt, hogy ha valószínűségi változók egy sorozata tart egy határeloszláshoz, akkor ez az állítás érvényben marad e valószínűségi változók kis perturbációjára is. Végül egy alkalmas konstrukcióval megmutatom, hogy ezekből az eredményekből levezethető a megfogalmazott határeloszlástétel.

Pontosabban, a következő állításokat fogom belátni.

Határeloszlástétel Poisson eloszlású valószínűségi változókból álló szériasorozatokra. *Legyenek adva $\lambda_{k,j}$ paraméterű $\eta_{k,j}$, Poisson eloszlású valószínűségű változók, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, úgy, hogy rögzített k-ra az $\eta_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók függetlenek, és a $\lambda_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}$ összegek teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda$ relációt valamely $\lambda>0$ számmal. Ekkor a $T_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\eta_{k,j}$ véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz.*

Határeloszlástétel véletlen sorozatok kis perturbációjára. (Slutzky lemma.) *Legyen adva valószínűségi változók egy T_k és ε_k sorozata, $k=1,2,\dots$, úgy, hogy a T_k sorozat eloszlásban konvergál egy F eloszláshoz, és az ε_k sorozat sztochasztikusan konvergál nullához, ha $k\to\infty$. Ekkor az $S_k=T_k+\varepsilon_k$, $k=1,2,\dots$, sorozat szintén eloszlásban konvergál az F eloszláshoz, ha $k\to\infty$.*

Lemma alkalmas Poisson eloszlású valószínűségi változók konstrukciójáról. *Legyen adva egy ξ nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, amelyre $\lambda=P(\xi=1)\le\frac{1}{10}$, és egy a ξ valószínűségi változótól független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású ζ valószínűségi változó. Legyen $\bar\lambda$ az $xe^{-x}=\lambda$ egyenlet egynél kisebb megoldása. Ekkor konstruálható olyan $y=f(k,x)$, $k=0,1,2,\dots$, $0\le x\le1$, függvény, amelyre az $\eta=f(\xi,\zeta)$ valószínűségi változó Poisson eloszlású $\bar\lambda$ paraméterrel, $\{\omega\colon\,\xi(\omega)=1\}=\{\omega\colon\,\eta(\omega)=1\}$, $\{\omega\colon\,\xi(\omega)=0\}\subset\{\omega\colon\,\eta(\omega)=0\}$, ha $P(\xi(\omega)=0)\le P(\eta(\omega)=0)$, és $\{\omega\colon\,\xi(\omega)=0\}\supset\{\omega\colon\,\eta(\omega)=0\}$, ha $P(\xi(\omega)=0)\ge P(\eta(\omega)=0)$.*

Először megmutatom, hogy ezekből az eredményekből következik az előadásban megfogalmazott határeloszlástétel.

Tekintsük a tételben szereplő $\xi_{k,j}$ valószínűségi változókat, és válasszunk ezenkívül egymástól és a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változóktól független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\zeta_{k,j}$ valószínűségi változókat, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$. Definiáljunk mindegyik $(\xi_{k,j},\zeta_{k,j})$ párhoz egy az *alkalmas Poisson eloszlású valószínűségi változók konstrukciójáról* szóló lemmában felsorolt feltételeknek eleget tevő $f(k,x)$ függvényt és

$\eta_{k,j} = f(\xi_{k,j}, \zeta_{k,j})$ $\bar\lambda_{k,j}$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változót, ahol $\bar\lambda_{k,j}$ az $xe^{-x} = \lambda_{k,j}$ egyenlet $[0,1]$ intervallumba eső megoldása. (A felhasznált lemmában szerepelt a $\lambda < \frac{1}{10}$ feltétel. Ez azonban nem okoz problémát, mert a $\sup\limits_{1\le j\le n_k} \lambda_{k,j} \to 0$, ha $k \to \infty$ feltétel miatt ez a feltétel teljesül $k \ge k_0$ esetben alkalmas k_0 index-szel, és a szériasorozat első néhány sorát elhagyhatjuk. Ez nem változtatja meg a konvergencia jellegét.) Megmutatom, hogy az így bevezetett $\eta_{k,j}$ valószínűségi változók segítségével a bizonyítandó határeoszlás levezethető a Slutzky lemmából.

Tekintsük az $\eta_{k,j}$, $k = 1,2,\dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozatot és a $T_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \eta_{k,j}$ összegeket. Azt állítom, hogy ezekre alkalmazható a *határeloszlástétel Poisson eloszlású valószínűségi változókból álló szériasorozatokra*, és ez azt adja, hogy a T_k valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz. Valóban, a $(\xi_{k,j}, \zeta_{k,j})$ párok függetlenségéből rögzített k indexre következik az $\eta_{k,j}$ (Poisson eloszlású) valószínűségi változók függetlensége is rögzített k indexre. Ezért elég megmutatni azt, hogy a $\bar\lambda_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar\lambda_{k,j}$ összegek teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty} \bar\lambda_k = \lambda$ relációt. Viszont egyszerű számolás mutatja, hogy $|\bar\lambda_{k,j} - \lambda_{k,j}| \le 10\lambda_{k,j}^2$, azaz $\bar\lambda_{k,j}$ és $\lambda_{k,j}$ elég közel vannak egymáshoz. Innen $|\lambda_k - \bar\lambda_k| \le 10 \sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j}^2 \le 10 \left(\sup\limits_{1\le j\le n_k} \lambda_{k,j} \right) \sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \to 0$, ha $k \to \infty$, mert $\sup\limits_{1\le j\le n_k} \lambda_{k,j} \to 0$, és $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \to \lambda$, ha $k \to \infty$. Innen következik, hogy nemcsak a $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda$, hanem a $\lim\limits_{k\to\infty} \bar\lambda_k = \lambda$ reláció is teljesül.

Vezessük be az $\varepsilon_k = S_k - T_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} (\xi_{k,j} - \eta_{k,j})$, $k = 1,2,\dots$, valószínűségi változókat. Azt akarjuk megmutatni, hogy az S_k valószínűségi változóknak ugyanolyan határeloszlásuk van, mint a T_k valószínűségi változóknak, ha $k \to \infty$. Ehhez a Slutzky lemma alapján elég megmutatni, hogy az ε_k valószínűségi változók sztochasztikusan nullához tartanak, ha $k \to \infty$. A következő, formálisan erősebb állítást fogom megmutatni.

$$P(\varepsilon_k \ne 0) \le \sum_{j=1}^{n_k} P(\xi_{k,j} \ne \eta_{k,j}) \to 0, \quad \text{ha } k \to \infty.$$

E reláció bizonyítása érdekében írjuk fel a

$$\begin{aligned} P(\xi_{k,j} \ne \eta_{k,j}) &\le P(\xi_{k,j} \ge 2) + P(\eta_{k,j} \ge 2) + |P(\xi_{k,j} = 0) - P(\eta_{k,j} = 0)| \\ &\le P(\xi_{k,j} \ge 2) + P(\eta_{k,j} \ge 2) + |P(\xi_{k,j} = 0) - (1 - \lambda_{k,j})| \\ &\quad + |P(\eta_{k,j} = 0) - (1 - \bar\lambda_{k,j})| + |\bar\lambda_{k,j} - \lambda_{k,j}| \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget. Vegyük továbbá észre, hogy

$$(1 - \lambda_{k,j}) - P(\xi_{k,j} = 0) = \sum_{l:\, l\ne 1} P(\xi_{k,j} = l) - P((\xi_{k,j} = 0) = P(\xi_{k,j} \ge 2),$$

és hasonlóan $(1-\bar{\lambda}_{k,j}) - P(\eta_{k,j}=0) = P(\eta_{k,j}\ge 2)$. Ezért az előző egyenlőtlenség átírható, mint

$$P(\xi_{k,j}\neq\eta_{k,j}) \le 2P(\xi_{k,j}\ge 2) + 2P(\eta_{k,j}\ge 2) + |\bar{\lambda}_{k,j}-\lambda_{k,j}|.$$

A kívánt becslést megkaphatjuk ezen egyenlőtelenségek j argumentum szerinti összegezésével rögzített k-ra. Felhasználjuk, hogy egyrészt $\sum\limits_{j=1}^{n_k} P(\xi_{k,j}\ge 2)\to 0$, ha $k\to 0$ a bizonyítandó tétel feltételei miatt, másrészt $\sum\limits_{j=1}^{n_k} P(\eta_{k,j}\ge 2) \le \sum\limits_{j=1}^{n_k} 2\bar{\lambda}_{k,j}^2 \le \sum\limits_{j=1}^{n_k} 4\lambda_{k,j}^2 \to 0$, ha $k\to\infty$ a Poisson eloszlások tulajdonságai és a $|\lambda_{k,j}-\bar{\lambda}_{k,j}|\le 10\lambda_{k,j}^2$ egyenlőtlenség miatt. Hasonlóan

$$\sum_{j=1}^{n_k} |\bar{\lambda}_{k,j}-\lambda_{k,j}| \le 10\sum_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}^2 \to 0, \quad \text{ha } k\to\infty.$$

Ezen egyenlőtlenségek alapján

$$\sum_{j=1}^{n_k} P(\xi_{k,j}\neq\eta_{k,j}) \to 0, \quad \text{ha } k\to\infty,$$

és a Slutzky lemma segítségével megkapjuk, hogy nemcsak a T_k, hanem az S_k sorozat is konvergál eloszlásban a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $k\to\infty$.

Megjegyzés. Valamely F_n eloszlásfüggvények konvergenciája egy F eloszlásfüggvényhez azt jelenti, hogy az $F(\cdot)$ határeloszlásfüggvény minden x folytonossági pontjában az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények sorozata konvergál a határeloszlásfüggvény $F(x)$ értékéhez. Ebben a tételben, legalábbis formálisan, másképp fogalmaztuk meg az eloszlásban való konvergenciát. Valójában azonban, mivel olyan speciális esetet tekintetettünk, ahol egész értékű valószínűségi változók eloszlásának sorozata konvergál egy egész értékű valószínűségi változó eloszlásához, az itt kimondott konvergencia ugyanazt jelenti, mint a hagyományos értelemben vett konvergencia.

Valóban, legyen S egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és rögzítsünk egy tetszőleges l nem negatív egész számot. Ez a szám nem folytonossági pontja az S valószínűségi változó eloszlásfüggvényének, viszont felírhatjuk a $P(S=l) = P(S<l+\frac{1}{2}) - P(S<l-\frac{1}{2})$ azonosságot. Hasonlóan $P(S_k=l) = P(S_k < l+\frac{1}{2}) - P(S_k<l-\frac{1}{2})$ minden $k=1,2,\dots$ számra. Másrészt $\lim\limits_{k\to\infty}[P(S_k<l+\frac{1}{2}) - P(S_k < l-\frac{1}{2})] = [P(S<l+\frac{1}{2}) - P(S<l-\frac{1}{2})]$, a bizonyított konvergenciából, és innen adódik a Tétel eredeti formában kimondott állítása. Azt is be lehet látni, hogy a tételben kimondott konvergenciából következik a hagyományos értelemben vett eloszlásban való konvergencia ebben az esetben.

A Poisson eloszlású valószínűségi változókból álló szériasorozatokra vonatkozó határeloszlástétel bizonyítása. Az állítás nyilvánvaló, mert a tekintett T_k valószínűségi változók, amelyek független Poisson eloszlású valószínűségi változók összegei, Poisson eloszlásúak. Továbbá paraméterük λ_k. Ezért a $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda$ relációból következik, hogy a T_k valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz.

A Slutzky lemma bizonyítása. Tekintsük az $F(\cdot)$ határeloszlás függvény egy x folytonossági pontját. Rögzítsünk egy kis $\delta > 0$ számot, és válasszunk olyan $\eta > 0$ számot, amelyre $F(x+\eta) < F(x) + \delta$, $F(x-\eta) > F(x) - \delta$, és mind az $x+\eta$, mind az $x-\eta$ pont folytonossági pontja az $F(\cdot)$ függvénynek. Ezzel a választással

$$P(T_k + \varepsilon_k < x) \le P(T_k < x + \eta) + P(\varepsilon_k < -\eta)$$

és

$$\begin{aligned} 1 - P(T_k + \varepsilon_k < x) &= P(T_k + \varepsilon_k \ge x) \\ &\le P(T_k \ge x - \eta) + P(\varepsilon_k > \eta) = 1 - P(T_k < x - \eta) + P(\varepsilon_k > \eta). \end{aligned}$$

Innen

$$P(T_k < x - \eta) - P(\varepsilon_k > \eta) \le P(T_k + \varepsilon_k < x) \le P(T_k < x + \eta) + P(\varepsilon_k < -\eta),$$

és $k \to \infty$ határátmenetet alkalmazva és felhasználva azt, hogy az ε_k valószínűségi változók sztochasztikusan nullához konvergálnak azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x) - \delta \le F(x - \eta) &\le \liminf_{k\to\infty} P(T_k + \varepsilon_k < x) \\ &\le \limsup_{k\to\infty} P(T_k + \varepsilon_k < x) \le F(x + \eta) \le F(x) + \delta. \end{aligned}$$

Mivel ez az állítás minden $\delta > 0$ számra érvényes, innen következik a Slutzky lemma.

Az alkalmas Poisson eloszlású valószínűségi változók konstrukciójáról szóló lemma bizonyítása. Definiáljuk az $f(k,x)$ függvényt a $k = 1$ esetben az $f(1,x) = 1$ formulával minden $0 \le x \le 1$ számra. Az $f(k,x)$ függvénynek az általános esetben érvényes definiciója előtt vezessük be a $p_k = P(\xi = k)$ és $\bar p_k = \frac{\bar\lambda^k}{k!} e^{-\bar\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, mennyiségeket. (Speciálisan $p_1 = \bar p_1 = \lambda$.) Legyen továbbá $P_2 = \sum\limits_{k=2}^{\infty} p_k$, és $\bar P_2 = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \bar p_k$. Ha $\bar p_0 \le p_0$, akkor legyen $f(0,x) = 0$, ha $0 \le x \le \frac{\bar p_0}{p_0}$, és azokban a (k,x) pontokban, ahol még nem definiáltuk az $f(k,x)$ függvényt ott ezt úgy fogjuk megtenni, hogy ezekben a pontokban az $f(\cdot)$ függvény 1-nél szigorúan nagyobb egész értékeket vegyen fel. Ha $\bar p_0 > p_0$, akkor legyen $f(0,x) = 0$ minden $0 \le x \le 1$ számra, és $f(k,x) = 0$, ha $k \ge 2$ és $0 \le x \le \frac{(\bar p_0 - p_0)}{P_2}$. Ebben az esetben is úgy fogjuk definiálni az $f(k,x)$ függvényt a még nem tekintett (k,x) argumentumokban, hogy az ott 1-nél szigorúan nagyobb egész értéket vegyen fel. Még nem definiáltuk az $f(k,x)$ függvényt mindenütt, de már előírtuk, hogy hol vesz fel nulla és 1 értéket. Innen következik, hogy $P(\eta = 0) = \bar p_0$, $P(\eta = 1) = \bar p_1$, $P(\eta \ge 2) = \bar P_2$, továbbá $\{\omega\colon \xi(\omega) = 1\} = \{\omega\colon \eta(\omega) = 1\}$, $\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\} \subset \{\omega\colon \eta(\omega) = 0\}$, ha $P(\xi(\omega) = 0) \le P(\eta(\omega) = 0)$, és $\{\omega\colon \xi(\omega) = 0\} \supset \{\omega\colon \eta(\omega) = 0\}$, ha $P(\xi(\omega) = 0) \ge P(\eta(\omega) = 0)$. A $\{(k,x)\colon f(k,x) = j\}$, $j = 2, 3, \dots$, halmazokat úgy kell definiálni, hogy teljesüljön a $P(\eta = j) = P(f(\xi,\zeta) = j) = \bar p_j$ azonosság minden $j \ge 2$ egész számra.

Egy kívánt tulajdonságú $f(k,x)$ függvényt például a következőképp definiálhatunk. Az $f(k,x)$ függvény definicióját bizonyos $C_k = \{(k,x)\colon\ A_k < x \le 1\}$, $k = 0$ vagy $k = 2,3,\dots$, alakú halmazok unióján kell még megadni, ahol $A_0 = 1$, és $A_k = \frac{(\bar{p}_0 - p_0)}{\bar{P}_2}$ a $k \ge 2$ esetben, ha $\bar{p}_0 > p_0$, és $A_0 = \frac{\bar{p}_0}{p_0}$, és $A_k = 0$ a $k \ge 2$ esetben, ha $\bar{p}_0 \le p_0$. Vegyük észre, hogy $\sum\limits_{k\colon\, k \ne 1} p_k(1 - A_k) = 1 - p_1 - \bar{p}_0 = 1 - \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = \bar{P}_2$. Osszuk fel mindegyik $[A_k, 1]$ intervallumot $b_{k,j} = \frac{\bar{p}_j}{\bar{P}_2}(1 - A_k)$ hosszúságú diszjunkt $B_{k,j}$ intervallumok uniójára, $j = 2,3,\dots$. Mivel $\sum\limits_{j=2}^{\infty} b_{k,j} = (1 - A_k)\sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{\bar{p}_j}{\bar{P}_2} = 1 - A_k$, ez lehetséges. Ilyen választással $P(\eta = j) = \sum\limits_{k\colon\, k \ne 1} p_k b_{k,j} = \frac{\bar{p}_j}{\bar{P}_2} \sum\limits_{k\colon\, k \ne 1} p_k(1 - A_k) = \bar{p}_j$ minden $j \ge 2$ számra, mivel $\sum\limits_{k\colon\, k \ne 1} p_k(1 - A_k) = \bar{P}_2$. Ez azt jelenti, hogy ez a konstrukció rendelkezik a lemmában előírt tulajdonságokkal.