AZ ÁPRILIS 20.-I DOLGOZAT FELADATAI ÉS KÉRDÉSEI

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$ és $\lambda \ne \mu$. Számítsa ki a $\xi+\eta$ összeg sűrűségfüggvényét.

2.) Legyen a (ξ, η) kétdimenziós véletlen vektor eloszlása egyenletes a $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ csúcspontok által meghatározott derékszögű háromszögben, azaz legyen sűrűségfüggvénye az $f(x,y) = 1$ az $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+2y \le 2$ egyenlőtlenséget teljesítő (x,y) pontokban, és $f(x,y) = 0$ egyébként. Számolja ki a ξ és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)$ kovarianciáját.

3.) Legyen ξ, η és ζ három független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mutassa meg, hogy a $\xi+\eta+\zeta$ és a $\frac{\xi+\eta-2\zeta}{\xi-2\eta+\zeta}$ valószínűségi változók függetlenek egymástól.

4.) Ledobunk 6000 pontot egymástól függetlenül a $[0,3]$ intervallumra egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok helyének sűrűségfüggvénye legyen $f(x) = \frac{1}{3}$, ha $0 \le x \le 3$, és $f(x) = 0$ egyébként. Egy jegyzőkönyvbe felírjuk a ledobott pontok némileg módosított értékét a következő módon. Ha a ledobott pont értéke a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor a pont értéket írjuk a jegyzőkönyvbe, ha a pont az $[1,2]$ intervallumba esik akkor az 1 számot, ha pont a $[2,3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjunk egy normális eloszlásfüggvény táblázat segítségével jó közelítő értéket annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt 6000 szám összege 6940 és 7080 közé esik.

5.) Mi a sztochasztikus folyamat definiciója? Mikor mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat Gauss folyamat?

6.) Hogy szól a többváltozós centrális határeloszlástétel? Milyen eredményeket tanultunk, amelyek szükségesek annak indoklásához, hogy ez a tétel egy jól megfogalmazott állítás?

MEGOLDÁSOK.

1. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-y)\,du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x-u < 0$, azaz $u \ge x$. Innen

$$f*g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\mu e^{-\mu(x-u)}\,du = \lambda\mu e^{-\mu x}\int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\,du, \quad \text{ha } x \ge 0,$$

és $f*g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f*g(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu-\lambda}\left[e^{-(\lambda-\mu)u}\right]_0^x = \lambda\mu\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\mu x}}{\mu-\lambda} \quad \text{ha } x \ge 0 \text{ és } \lambda \ne \mu.$$

2.) $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta$, $E\xi\eta=\int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi=\int xf(x,y)\,dx\,dy$ és $E\eta=\int yf(x,y)\,dx\,dy$.

$$\begin{aligned}E\xi\eta&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2 x\left(\int_0^1 f(x,y)y\,dy\right)\,dx\\&=\int_0^2 x\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)\,dx=\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}}\,dx=\int_0^2 x\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}{2}\,dx\\&=\int_0^2\left(\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\,dx=\frac{1}{2}-\frac{8}{6}+2=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

$$E\xi=\int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}}x\,dy\right)\,dx=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\,dx=2-\frac{8}{6}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned}E\eta&=\int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}}y\,dy\right)\,dx=\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}}\,dx\\&=\int_0^2\frac{1-x+\frac{x^2}{4}}{2}\,dx=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Innen, $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{18}$.

3.) Elég azt megmutatni, hogy a $\xi+\eta+\zeta$ valószínűségi változó és a $(\xi+\eta-2\zeta,\xi-2\eta+\zeta)$ véletlen vektor független egymástól. Ez viszont azért igaz, mert $(\xi+\eta+\zeta,\xi+\eta-2\zeta,\xi-2\eta+\zeta)$ háromdimenziós normális eloszlású vektor nulla várható értékű koordinátákkal, továbbá $E(\xi+\eta+\zeta)(\xi+\eta-2\zeta)=0$, és $E(\xi+\eta+\zeta)(\xi-2\eta+\zeta)=0$.

4.) Jelölje ξ_j a j-ik ledobott pont értékét, $1\le j\le 6000$, és legyen $\eta_j=f(\xi_j)$, ahol az $f(x)$, $0\le x\le 3$, függvényt az $f(x)=x$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=1$, ha $1\le x\le 2$, és $f(x)=2$, ha $2\le x\le 3$ képletekkel definiáljuk. Ekkor η_j a j-ik jegyzőkönyvbe írt szám értéke, és minket a $P\left(6940\le\sum\limits_{j=1}^{6000}\eta_j\le 7080\right)$ valószínűség értéke érdekel. Ennek kiszámítása érdekében számítjuk ki először az $E\eta_j$ és $\mathrm{Var}\,\eta_j$ mennyiségeket. $E\eta_j=\int_0^3\frac{1}{3}f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{3}x\,dx+\frac{1}{3}(1+2)=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$, $E\eta_j^2=\int_0^3\frac{1}{3}f^2(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{3}x^2\,dx+\frac{1}{3}(1^2+2^2)=\frac{1}{9}+\frac{5}{3}=\frac{16}{9}$, és $\mathrm{Var}\,\eta_j=E\eta_j^2-(E\eta_j)^2=\frac{16}{9}-\frac{49}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. Innen az $S=\sum\limits_{j=1}^{6000}\eta_j$ valószínűségi változóra $ES=7000$, és $\mathrm{Var}\,S=2500=50^2$. Ezért a centrális határeloszlástétel szerint

$$\begin{aligned}P\left(6940\le\sum_{j=1}^{6000}\eta_j\le 7080\right)&=P\left(\frac{6940-7000}{50}\le\frac{S-ES}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S}}\le\frac{7080-7000}{50}\right)\\&=P\left(-1.2\le\frac{S-ES}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S}}\le 1.6\right)\sim\Phi(1.6)-\Phi(-1.2)\\&=\Phi(1.6)+\Phi(1.2)-1\sim(0.9452+0.8849-1)\sim 0.83.\end{aligned}$$

5.) Ha adva van egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és azon valószínűségi változók valamely T halmazzal indexelt ξ_t rendszere, akkor ez utóbbit sztochasztikus folyamatnak nevezzük. Egy sztochasztikus folyamat akkor Gauss folyamat, ha a T halmaz minden $\{t_1, \dots, t_k\}$ véges részhalmazára a $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ véletlen vektor normális eloszlású.

6.) Legyenek $(\xi_j(1), \dots, \xi_j(d))$, $j = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású véletlen vektorok, amelyek mindegyik koordinátájának van véges második momentuma, azaz $E\xi_k(1)^2 < \infty$ minden $1 \le k \le d$ indexre. Definiáljuk az

$$S_n = (S_n(1), \dots, S_n(d_k)) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j(1) - E\xi_j(1)), \dots, \sum_{j=1}^{n} (\xi_j(d) - E\xi_j(d)) \right)$$

véletlen vektorokat. A többváltozós centrális határeloszlástétel azt mondja ki, hogy az $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású véletlen vektorhoz, amelynek kovariancia mátrixa megegyezik a $(\xi_j(1), \dots, \xi_j(d))$ véletlen vektorok kovariancia mátrixával, ha $n \to \infty$.

Ahhoz, hogy lássuk, hogy ez értelmes állítás tudnunk kell egyrészt, hogy létezik a kívánt kovariancia mátrix-szal rendelkező nulla várható értékű normális eloszlású véletlen vektor. Ez azért igaz, mert minden véletlen vektor kovariancia mátrixa szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrix, és minden pozitív szemidefinit mátrixhoz létezik ilyen kovariancia mátrixú nulla várható értékű normális eloszlású (nulla várható értékű) véletlen vektor. Másrészt tudnunk kell, hogy a határeloszlást egyértelműen meghatároztuk. Ez abból az eredményből következik, amely szerint egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását egyértelműen meghatározza annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa.