

Vizsga feladatok

- 1.) Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots független, korlátos valószínűségi változók, amelyek nem elfajulóak a következő értelemben: $P(\xi_n = 0) < 1$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. Legyen $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók által generált σ -algebra, és definiáljuk az $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_1 \cdots \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Mutassa meg, hogy az (S_n, \mathcal{F}_n) sorozat akkor és csak akkor martingál, ha $E\xi_n = 0$ minden $n = 2, 3, \dots$ indexre.
- 2.) Ledobunk a $[-1, 1]$ intervallumra 5600 pontot egyenletes eloszlással, tehát a ledobott pontok helyének a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Felírjuk egy jegyzőkönyvbe azon pontok helyének az értékeit, amelyek vagy a $[-1, -\frac{1}{2}]$ vagy az $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumba esnek, a többi pontot pedig figyelmen kívül hagyjuk. Jelölje S a $[-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ intervallumba esett pontok számát, azaz azt, hogy hány számot írtunk a jegyzőkönyvbe, és T a jegyzőkönyvbe írt számok összegét. Adjon jó közelítő becslést egy normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy $P(S > 2830, T > 70)$.
- 3.) Legyen $W(t)$, $t \geq 0$, egy Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy a $Z(u) = \frac{W(e^u)}{e^{u/2}}$, $-\infty < u < \infty$, sztochasztikus folyamat stacionárius.
- 4.) Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számolja ki az $E\left(\frac{\xi^4 + 1}{\eta^2 + 1} \mid \eta\right)$ feltételes várható értéket.
- 5.) Mikor mondjuk, hogy a számegyenesen definiált $F_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata eloszlásban konvergál egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez, ha $n \rightarrow \infty$? Ha több ekvivalens definíciót ismer, akkor adja meg mindegyiket.
- 6.) Mi a Poisson folyamat definíciója?
- 7.) Milyen konvergencia tételeket ismer martingálokról?
- 8.) Mit jelent egy Markov láncban az osztálytulajdonság? Milyen osztálytulajdonságokat ismer? Mit jelent az, hogy egy Markov lánc irreducibilis? Milyen határeloszlástételeket ismer irreducibilis Markov lánc állapotainak a viselkedéséről, ha az idő tart a végtelenhez?