Vizsga feladatok

1.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebra, és definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Mutassa meg, hogy az $(e^{S_n - n/2}, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál.

2.) Ledobunk a $[-1, 1]$ intervallumra 2700 pontot egyenletes eloszlással, tehát a ledobott pontok helyének a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Adjon jó közelítő becslést egy normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy a kapott pontok értékeinek az összege nagyobb, mint 15, és a négyzetösszege nagyobb, mint 880.

3.) Legyenek ξ, η és ζ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsa be, hogy a $\xi + \eta + \zeta$, $3\xi - 2\eta - \zeta$ és $\xi + 4\eta - 5\zeta$ valószínűségi változók függetlenek.

4.) Egy A $n \times n$ méretű négyzetes mátrixhoz mikor lehet találni olyan $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektort, amelynek ő a kovariancia mátrixa?

5.) Mi a Wiener bridge definiciója?

6.) Hogyan szól a funkcionális centrális határeloszlástétel?

7.) Mikor nevezünk egy Markov láncot tranziens, rekurrens, null-rekurrens illetve pozitív rekurrensnek? Milyen eredményeket ismer, amelyek segítenek eldönteni, hogy egy Markov lánc mikor tranziens, mikor null-rekurrens és mikor pozitív rekurrens?

8.) Hogyan szól a Radon–Nikodym tétel?