Sztochasztikus folyamatok fogalma és megadása.

Először röviden ismertetem az előadás címében szereplő sztochasztikus folyamat definícióját, illetve tárgyalom azt a kérdést, hogy hogyan lehet és érdemes egy sztochasztikus folyamatot megadni. E kérdések tisztázása érdekében felidézem a valószínűségi változó definicióját. Érdemes ezt a fogalmat először a legáltalánosabb esetben ismertetni, amikor egy nem feltétlenül valós vagy vektor értékű valószínűségi változót tekintünk.

Valószínűségi változók (általános) definiciója. *Legyen adva egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező (azaz egy* Ω *halmaz, amelyet biztos eseménynek is neveznek, valamint egy az* Ω *halmaz bizonyos (mérhetőnek nevezett) részhalmazaiból álló* $\mathcal{A}$ σ*-algebra és egy az* $\mathcal{A}$ σ*-algebrán definiált* P *valószínűségi mérték), továbbá egy* $(X, \mathcal{F})$ *mérhető tér, azaz egy* X *halmaz és annak bizonyos (mérhetőnek nevezett) részhalmazait tartalmazó* $\mathcal{F}$ σ*-algebra. Azt mondjuk, hogy egy az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *téren definiált, és értékeit az* $(X, \mathcal{F})$ *téren felvett mérhető* $\xi(\omega)$ *függvény egy* $(X, \mathcal{F})$ *értékű valószínűségi változó. Ez azt jelenti, hogy a* $\xi\colon \Omega \to F$ *leképezés mérhető. A* $\xi\colon \Omega \to F$ *leképezést akkor nevezzük mérhetőnek, ha minden* $F \in \mathcal{F}$ *mérhető halmaz ősképe, azaz az* $\{\omega\colon \xi(\omega) \in F\}$ *halmaz mérhető, más szóval* $\{\omega\colon \xi(\omega) \in F\} \in \mathcal{A}$*. Annak valószínűségét, hogy a* ξ *valószínűségi változó értékét egy* $F \in \mathcal{F}$ *halmazban veszi fel a* $P(\xi \in F) = P\{\omega\colon \xi(\omega) \in F\}$ *képlet adja meg.*

Megjegyzés: A fenti kissé formálisnak tűnő definició azért természetes, mert egyrészt nem megszorító abban az értelemben, hogy minden minket érdeklő esetben alkalmazható, másrészt biztosítja, hogy mindazok a természetes heurisztikus érvelések, amelyeket használni szeretnénk igazolhatóak. Külön kiemelem azt a tényt, hogy sokszor, amikor végtelen összegekkel számolunk, azt a tényt használjuk fel, hogy a valószínűség nemcsak additív, hanem σ-additív is. A mértékelmélet eredményei segítségével megmutatható, hogy ez a plusz feltétel is teljesíthető. Ennek azonban az az ára, hogy nem tudunk minden eseménynek, hanem csak bizonyos 'szép' mérhető halmazoknak megfelelő eseményeknek a valószínűségéről beszélni. Az ilyen események együtt egy σ-algebrát alkotnak. Ezért jelenik meg a definicióban az első hallásra idegenül hangzó σ-algebra fogalma. Viszont az összes minket érdeklő esemény, amelynek a valószínűségéről beszélni kívánunk része ennek a σ-algebrának. Ezért ennek bevezetése nem okoz valódi problémát.

Valós és vektor értékű valószínűségi változók definiciója. *Valós illetve* n*-dimenziós vektor értékű valószínűségi változón egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn definiált* $(R, \mathcal{B})$*, illetve* $(R^n, \mathcal{B}^n)$ *értékű mérhető függvényt értünk, ahol* R *a valós számok halmazát,* R^n *pedig az* n*-dimenziós Euklideszi teret jelöli. Továbbá* $\mathcal{B}$ *a Borel mérhető halmazok* σ*-algebrája az* R *téren,* $\mathcal{B}^n$ *pedig a Borel mérhető halmazok* σ*-algebrája az* R^n *téren. (A Borel* σ*-algebra a nyílt halmazokat tartalmazó legszűkebb* σ*-algebra.)*

E bevezetés után ismertetem a sztochasztikus folyamatok fogalmát.

Sztochasztikus folyamatok definiciója. *Legyen adva egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező és egy tetszőleges* T *(index)halmaz. Valószínűségi változóknak az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn definiált és a* T *halmaz elemeivel indexelt* ξ_t*,* $t \in T$*, rendszerét az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *téren definiált (és a* T *halmazzal indexelt) sztochasztikus folyamatnak nevezünk. Az* *alkalmazások többségében a T halmazt a (nem-negativ) valós vagy egész számok halmazának választjuk.*

Megjegyzem, hogy az esetek többségében csak *valós értékű* valószínűségi változókat fogunk tekinteni, de az általános definició szerint tetszőleges ($(X, \mathcal{X})$ mérhető téren értelmezett) mérhető függvényt is valószínűségi változónak nevezünk. Ezt a szabadságot felhasználva időnként vektor vagy komplex szám értékű valószínűségi változókról is beszélhetünk.

Nem kötelező feladat: *Legyen adva egy T indexhalmaz és az $(R, \mathcal{B})$ valós számegyenesnek a rajta definiált $\mathcal{B}$ Borel σ-algebrával a T halmaz elemeivel indexelt $(R_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$, példányai minden $t \in T$ elemre. Tekintsük az $(R_t, \mathcal{B}_t)$ mérhető terek $(R^T, \mathcal{B}^T) = \prod\limits_{t\in T} (R_t, \mathcal{B}_t)$ direkt szorzatát az minden $t \in T$ elemre, ami egy új $(R^T, \mathcal{B}^T)$ mérhető tér. Mutassuk meg, hogy a T-halmazzal indexelt valós értékű sztochasztikus folyamatokat a következő módon is definiálhattuk volna ekvivalens módon: Egy T-halmazzal indexelt valós értékű sztochasztikus folyamat egy $(R^T, \mathcal{B}^T)$ értékű valószínűségi változó.*

Felmerül az a kérdés, hogy hogyan adhatunk meg egy sztochasztikus folyamatot. Emlékeztetek arra, hogy valószínűségi változókat általában nem úgy adtunk meg, hogy definiáltuk a valószínűségi mezőt és rajta a valószínűségi változót, hanem megadtuk a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és azt mondtuk, hogy valamely (közelebbről nem definiált valószínűségi mezőn) egy olyan valószínűségi változót tekintünk, amelynek ez az eloszlásfüggvénye. Ahhoz, hogy ezt megtehessük szükségünk volt egy olyan eredményre, amely pontosan jellemezte az eloszlásfüggvényeket. Természetes kívánság az, hogy képesek legyünk sztochasztikus folyamatokat hasonlóan jellemezni.

E kérdés vizsgálata előtt idézzük fel a valószínűségi változókról szóló analóg eredményt.

Tétel. *Egy $F(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye alkalmas $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változóknak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, azaz akkor és csak akkor létezik $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változóknak olyan rendszere egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre*

$$P(\xi_1 < u_1, \dots, \xi_k < u_k) = F(u_1, \dots, u_k)$$

minden $u_1, \dots, u_k$ valós szám-k-asra, ha ez az F függvény teljesíti a következő (i)—(iv) tulajdonságokat.

(i) $F(u_1, \dots, u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{u_j \to \infty \\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 1.$

(iii) $\displaystyle\lim_{\substack{u_j \to -\infty \\ \text{valamely } 1 \le j \le k \text{ számrra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 0.$ *(Ez úgy értendő, hogy az összes u_s, $1 \le s \le k$, $s \ne j$ koordinátát rögzítjük, és $u_j \to -\infty$.)*

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K}=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K})=\mu_F(\mathbf{K})=\sum_{\substack{u_j=\,a_j \text{ vagy } b_j\\ j=1,\dots,k}}(-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)}F(u_1,\dots,u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1,\dots,u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1,\dots,u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K})\ge 0$ *minden* $\mathbf{K}$ *téglatestre.*

Az előbb megfogalmazott tétel állításának az egyik fele, az hogy egy véletlen vektor eloszlásfüggvénye teljesíti a fent megfogalmazott (i)–(iv) tulajdonságokat viszonylag egyszerű. Csak a (iv) tulajdonság igazolása igényel némi munkát. Azt kell megérteni, hogy a viszonylag bonyolult $\mu(\mathbf{K})$ szám megegyezik a $P(a_j\le\xi_j<b_j,\,1\le j\le k)$ valószínűséggel. A tétel másik részének az állítását nehezebb bizonyítani. Az a feladat, hogy adva egy (i)–(iv) tulajdonságokat teljesítő $F(u_1,\dots,u_k)$ függvény, konstruáljunk egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt és azon az előírt tulajdonságokkal rendelkező $\xi_1,\dots,\xi_k$ valószínűségi változókat.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező modell konstrukciója a következő úgyevezett Stieltjes mérték létezéséről szóló állításon alapul:

Tétel a Stieltjes mérték létezéséről. *Legyen $F(u_1,\dots,u_k)$ olyan k-változós függvény, amely teljesíti az előző tételben megfogalmazott (i)–(iv) tulajdonságokat. Ekkor létezik és egyértelműen meg van határozva egy olyan μ_F Stieltjes mérték az R^k k-dimenziós tér Borel mérhető halmazainak $\mathcal{B}^k$ σ-algebráján, amely nem negatív σ-additív halmazfüggvény ezen a σ-algebrán, $\mu_F(R^k)=1$, és*

$$\mu_F(\{v_1,\dots,v_k\}\colon v_j<u_j,\,1\le j\le k\})=F(u_1,\dots,u_k)$$

minden $u_1,\dots,u_k$ valós számra.

Röviden ismertetem, hogyan lehet a fenti tétel segítségével a kívánt konstrukciót megadni. Legyen $(\Omega,\mathcal{A},P)=(R^k,\mathcal{B}^k,\mu_F)$, ahol R^k a k-dimenziós Eulideszi tér, $\mathcal{B}^k$ a rajta definiált Borel σ-algebra, és μ_F az adott tulajdonságú F függvény által meghatározott Stieltjes mérték. Definiáljuk a $\xi_j(\omega)$, $1\le j\le k$, valószínűségi változókat a fenti $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn a következőképp: Ha $\omega=(x_1,\dots,x_k)$, akkor $\xi_j(\omega)=x_j$, $1\le j\le k$. Nem nehéz belátni, hogy a fenti konstrukció teljesíti az összes kívánt tulajdonságot. Az egyetlen nehézség a bizonyításban annak megmutatása, hogy valóban valószínűségi mezőt definiáltunk. Ehhez azt kell tudnunk, hogy μ_F valóban (σ-additív) mérték, és ezt mondja ki az előbb megfogalmazott tétel.

Vektor értékű valószínűségi változók eloszlásainak jellemzéséről szóló tételnek fontos általánosítása az alább ismertetendő tétel, amely megadja, hogy mikor lehet sztochasztikus folyamatokat azok véges dimenziós eloszlásainak segítségével megadni. Ennek kimondása előtt bevezetek egy a tételben természetes módon megjelenő definiciót.

Eloszlások konzisztenciájának definiciója. *Legyen adva valamely T (végtelen) halmaz, és legyen a T halmaz minden $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ részhalmazához egy ezen halmaz elemeivel indexelt $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})$ eloszlásfüggvény hozzárendelve. (Ezek szemléletes tartalma a későbbi alkalmazásokban az lesz, hogy ha egy a T halmazzal indexelt sztochasztikus folyamatot megszorítunk a $\{t_1,\dots,t_n\}$ halmazra, akkor ennek a véletlen vektornak az eloszlása legyen $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})$.) Azt mondjuk, hogy a véges dimenziós eloszlások ezen rendszere konzisztens, ha tetszőleges véges $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ halmazra és annak (véges) $\{t_1,\dots,t_n,\bar t_1,\dots,\bar t_m\}\subset T$ kiterjesztésére*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})=F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots,t_{n+m}}(x_{t_1},\dots,x_{t_n},\infty,,\dots,\infty),$$

ahol

$$\begin{aligned}&F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots,t_{n+m}}(x_{t_1},\dots,x_{t_n},\infty,,\dots,\infty)\\&\quad=\lim_{x_{t_{n+1}}\to\infty}\cdots\lim_{x_{t_{n+m}}\to\infty}F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n},x_{t_{n+1}},\dots,x_{t_{n+m}}),\end{aligned}$$

és tetszőleges $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ halmazra és annak tetszőleges $\{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}\}\subset T$ permutációjára

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})=F_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(x_{t_{\pi(1)}},\dots,x_{t_{\pi(n)}}).$$

Ezen definició segítségével megadhatjuk az alábbi, a sztochasztikus folyamatok megadásában alapvető fontosságú tételt.

A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptétele. *Legyen adva egy (végtelen) T halmaz, valamint $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})$ véges dimenziós eloszlásfüggvényeknek egy a T halmaz $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ véges részhalamazaival indexelt konzisztens rendszere. Ekkor létezik egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező, azon egy ξ_t, $t\in T$, a T halmazzal indexelt sztochasztikus folyamat úgy, hogy minden $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ véges halamazra a $(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_n})$ véletlen vektor eloszlásfüggvénye az $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})$ eloszlásfüggvény.*

Megfogalmazok egy Kolmogorovtól származó mértékelméleti eredményt, amelyből könnyen levezethető a fenti alaptétel, és ezt a levezetést röviden ismertetem. A mértékelméleti tétel bizonyítását viszont elhagyom. A tétel kimondása előtt bevezetek néhány jelölést.

Legyen adva egy T végtelen halmaz, és tekintsük a számegyenesnek a hozzá tartozó Borel σ-algebrával együtt egy eme T halmazzal indexelt $(R_t,\mathcal{B}_t)$, $t\in T$, példányait, és vegyük ezeknek $(R^T,\mathcal{B}^T)=\left(\prod\limits_{t\in T}R_t,\prod\limits_{t\in T}\mathcal{B}_t\right)$ direkt szorzatát. Definiáljuk továbbá a következő $\mathcal{B}_0^T$ halmazrendszert, amely valójában a $\mathcal{B}^T$ σ-algebra véges sok koordinátától függő hengerhalmazaiból áll, és halmaz-algebrát alkot. Egy B halmaz akkor és csak akkor eleme a $\mathcal{B}_0^T$ halmazrendszernek, ha létezik olyan $T_0=\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ véges részhalmaza a T halmaznak, és olyan $\bar B=\bar B(t_1,\dots,t_n)$ halmaz, amelyre teljesül a

$\bar{B} \in \prod_{j=1}^{n} (R_{t_j}, \mathcal{B}_{t_j})$, reláció, és B a $\bar{B}$ által meghatározott hengerhalmaz az $(X^T, \mathcal{B}^T)$ térben, azaz valamely $x = \{x_t,\, t \in T\} \in R^T$ pontra az $x \in B$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \bar{B}$. Ezután megfogalmazom a következő eredményt.

Tétel A. *Legyen adva egy T végtelen halmaz, és tekintsük a számegyenesnek a hozzá tartozó Borel σ-algebrával együtt egy eme T halmazzal indexelt $(R_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$, példányait, és vegyük ezeknek az előbb bevezetett $(R^T, \mathcal{B}^T) = \left(\prod_{t \in T} R_t, \prod_{t \in T} \mathcal{B}_t \right)$ direkt szorzatát valamint a $\mathcal{B}_0^T \subset \mathcal{B}^T$ véges sok koordinátától függő hengerhalmazokból álló halmazrendszert. Legyen adva eloszlásfüggvényeknek egy egy a T halmaz véges $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\} \subset T$ részhalmazaival indexelt $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ konzisztens rendszere, és definiáljuk egy $B \in \mathcal{B}_0^T$ halmaznak a következő $\mu(B)$ mértékét. Ha egy B halmaz előáll, mint egy $\bar{B} = \bar{B}(t_1, \dots, t_k)$ halmaz által meghatározott hengerhalmaz, akkor legyen $\mu(B) = \mu_{F_{t_1,\dots,t_k}}(\bar{B})$, ahol $\mu_{F_{t_1,\dots,t_k}}$ az $F_{t_1,\dots,t_k}(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$ eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték a $\prod_{j=1}^{n} (R_{t_j}, \mathcal{B}_{t_j})$ téren. Ekkor μ (nem negatív, egyre normált) σ-additív halmazfüggvény a $\mathcal{B}_0^T$ σ-algebrán.*

Megjegyzés: A fenti tételben azért kellett feltenni azt, hogy a tekintett eloszlásfüggvények konzisztens rendszert alkotnak, mert ez biztosítja azt, hogy bár egy B hengerhalmaz előállítása hengerhalmazként nem egyértelmű (egy $\bar{B} = \bar{B}(t_1, \dots, t_k)$ halmaz által meghatározott hengerhalmaz előállítható $\bar{B} = \bar{B}'(t_1, \dots, t_k, t_{k+1})$ halmazként is, úgy hogy a valójában semmitmondó $-\infty < x_{t_{k+1}} < \infty$ feltétellel egészítjük ki a $\bar{B}$ halmazt definiáló relációt), de a $\mu(B)$ valószínűség definiálható, ennek értéke nem függ a B halmaz előállításától. A Stieltjes mérték létezéséről szóló tételből következik, hogy rögzített $k \geq 1$ egész számra és $t_1, \dots, t_k \in T$ indexekre igaz a következő állítás: Ha a μ halmazfüggvényt megszorítjuk a $\bar{B} = \bar{B}(t_1, \dots, t_k)$ alakú halmazok által meghatározott hengerhalmazokra, akkor μ σ-additív halmazfüggvény ezen a megszorításon. A tétel azt a lényegesen tartalmasabb állítást fogalmazza meg, hogy μ σ-additív halmazfüggvény az *összes hengerhalmazon* is σ-additív.

A Tétel A következménye. *A Carathéodory féle kiterjesztési tétel szerint a Tétel A-ban definált μ halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető egy az*

$$(R^T, \mathcal{B}^T) = \left(\prod_{t \in T} R_t, \prod_{t \in T} \mathcal{B}_t \right)$$

téren értelmezett valószínűségi mértékre.

A Kolmogorov-féle alaptétel bizonyítása a fenti tétel, illetve annak következménye alapján. Tekintsük a Tétel A-ban, illetve annak következménye által definiált $(R^T, \mathcal{B}^T)$ rendszert. Ez tekinthető úgy, mint egy valószínűségi mező, mert μ valószínűségi mérték ezen a téren. (Ennek a ténynek az igazolása a bizonyítás legnehezebb lépése.) Ezért definálhatjuk az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, mint az $(R^T, \mathcal{B}^T, \mu)$ teret, és az ω elemi események megegyeznek a T halmazon értelmezett valós értékű függvényekkel. Adva egy $\omega = \{x_t, t \in T\}$ elemi esemény, definiáljuk az $\xi_u(\omega)$, $u \in T$, valószínűségi változót a $\xi_u(\{x_t, t \in T\}) = x_u$ képlet segítségével. Ekkor az $\{\omega\colon \xi_{u_1}(\omega) < x_{u_1}, \dots, \xi_{u_k}(\omega) < x_{u_k}\}$ halmaz megegyezik azon függvényekből álló hengerhalmazzal, mely függvények értéke az u_1 pontban kisebb, mint x_{u_1}, az u_2 pontban kisebb, mint x_{u_2}, ... , az u_k pontban kisebb, mint x_{u_k}. Az ilyen függvényekből álló halmaz valószínűsége a konstrukció alapján $F_{u_1,\dots,u_k}(x_{u_1}, \dots, x_{u_k})$, és ezt kellett bebizonyítani.

Feladat a gyakorlatra: Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, és azon végtelen sok (esetleg megszámlálhatónál is több) $f_t(x)$, $t \in T$, mérhető függvény. Tekintsük az összes $f_t(x)$ függvény által generált σ-algebrát, azaz a legszűkebb σ-algebrát, amelyre nézve az összes f_t függvény mérhető. Lássuk be, hogy ez a következőképp is megadható: Tekintsük a T halmaz összes lehetséges megszámlálható részhalmazát, vegyük az általuk indexelt függvények által generált σ-algebrát, és vegyük ezen σ-algebrák egyesítését. Ez azt jelenti, hogy azt a halmazrendszert vesszük, amelyikbe egy B halmaz akkor és csak akkor tartozik, ha létezik a T indexhalmaznak olyan T_0 megszámlálható részhalmaza, hogy a B halmaz eleme a T_0 halmaz elemeivel indexelt függvények által generált σ-algebrának.

Feladat a gyakorlatra: Mutassuk meg az előző feladat segítségével, hogy az Tétel A állítása redukálható arra a speciális esetre, amikor T a nem negatív egész számok halmaza.

Szochasztikus folyamat trajektóriájának a fogalma. *Legyen adva egy T indexhalmazzal paraméterezett $\xi_t(\omega)$ sztochasztikus folyamat. Ennek egy rögzített ω elemi eseményhez tartozó trajektóriáján a T halmazon definiált $\xi_t(\omega)$ függvényt értjük.*