A JÚNIUS 14.-I VIZSGA FELADATAI

1.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, korlátos valószínűségi változók, amelyek nem elfajulók a következő értelemben: $P(\xi_n = 0) < 1$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. Legyen $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebra, és definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_1 \cdots \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Mutassa meg, hogy az $(S_n, \mathcal{F}_n)$ sorozat akkor és csak akkor martingál, ha $E\xi_n = 0$ minden $n = 2, 3, \dots$ indexre.

2.) Egy éven át lottózunk. Mind az 52 héten kitöltünk egy szelvényt (90 számból kell eltalálni ötöt). Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két alkalommal lesz (pontosan) hármas találatunk?

3. A következő játékot játsszuk. Két szabályos pénzdarabot feldobnak egymás után 10 000 alkalommal. Ha egy dobás eredménye két fejdobás akkor 2 forintot nyerünk, ha az eredmény két írásdobás akkor 2 forintot vesztünk, ha az eredmény egy fej és egy írásdobás akkor 1 forintot nyerünk. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat alapján annak a valószínűségére, hogy nyereményünk összege 4850 és 5300 forint között lesz.

4.) Legyen $W(t)$, $0 \le t \le 1$, egy Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy a $B(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat Wiener bridge, amely független a $W(1)$ valószínűségi változótól. (Adja meg a Wiener folyamat és Wiener bridge definicióját.)

5.) Mi a több-dimenziós normális eloszlás definiciója?

6.) Mi a Poisson folyamat definiciója?

7.) Egy A $n \times n$ méretű négyzetes mátrixhoz mikor lehet találni olyan $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektort, amelynek ő a kovariancia mátrixa?

8.) Mikor nevezünk egy Markov láncot tranziens, rekurrens, null-rekurrens illetve pozitív rekurrensnek? Milyen eredményeket ismer, amelyek segítenek eldönteni, hogy egy Markov lánc mikor tranziens, mikor null-rekurrens és mikor pozitív rekurrens?

9.) Mi a martingál és szemimartingál definiciója?