A MÁJUS 31.-I VIZSGA FELADATAI ÉS KÉRDÉSEI

1.) Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számolja ki az $E\left(\frac{(\xi^4+1)(\eta^2+1)}{\eta^4+1}\middle|\,\eta\right)$ feltételes várható értéket.

2.) Legyen adva egy Markov lánc, amelynek két állapota van, az $\{1\}$ és $\{2\}$ állapot, átmenetvalószínűségeit pedig a $p(\{1\}|\{1\}) = p(\{2\}|\{1\}) = \frac{1}{2}$ és $p(\{1\}|\{2\}) = 1 - p(\{2\}|\{2\}) = \frac{1}{3}$ képletek adják meg. Mi e Markov lánc stacionárius eloszlása?

3.) Legyen $W(t)$ Wiener folyamat a $0 \le t < \infty$ félegyenesen, és definiáljuk segítségével a $Z(u) = \frac{W(e^u)}{e^{u/2}}$, $-\infty < u < \infty$, sztochasztikus folyamatot. Mutassa meg, hogy a $Z(\cdot)$ sztochasztikus folyamat stacionárius, azaz minden s valós számra a $Z(u+s)$ és $Z(u)$, $-\infty < u < \infty$, sztochasztikus folyamatok eloszlása megegyezik.

4.) Ledobunk a $[-1,1]$ intervallumra 2700 pontot egyenletes eloszlással, tehát a ledobott pontok helyének a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Adjon jó közelítő becslést egy normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy a kapott pontok értékeinek az összege nagyobb, mint 15, és a négyzetösszege nagyobb, mint 880.

5.) Hogyan szól a centrális határeloszlástétel általános alakja szériasorozatokra?

6.) Hogyan szól a funkcionális centrális határeloszlástétel?

7.) Hogyan szól a felújítási tétel független, egyforma eloszlású, nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változók részletösszegeinek sorozatára, és mi a kapcsolata ennek az eredménynek Markov láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedésével? Milyen eredményeket ismer (diszkrét idejű) Markov láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről?

8.) Hogyan szól a Radon–Nikodym tétel, és hogyan definiáljuk segítségével egy ξ valószínűségi változó $E(\xi|\mathcal{F})$ feltételes várható értékét feltéve egy $\mathcal{F}$ σ-algebrát?