Markov-láncok és Markov-folyamatok

Tárgyalni fogom a Markov-láncok és Markov-folyamatok elméletét, amely a valószínűségszámítás egyik fontos része. Kissé informálisan a Markov-folyamatokat úgy jellemezhetjük, mint olyan sztochasztikus folyamatokat, amelyek jövőbeli viselkedéséről egy adott időpontig összegyűjtött információt a folyamat viselkedése a megfigyelt időintervallum végpontjában teljes mértékben tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy annak feltételes valószínűsége, hogy valamely a folyamatnak csak a jövőbeli viselkedésétől függő esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a Markov-folyamat a jelen időpontban egy adott értéket vesz fel, megegyezik ugyanennek az eseménynek a feltételes valószínűségével, feltéve a folyamat teljes múltbeli viselkedését. Megfogalmazom ezt az állítást pontosabban is. A pontos definicióban megjelenik a a feltételes valószínűség meglehetősen bonyolult, a Radon–Nykodim deriváltak létezésén alapuló általános fogalma. Viszont abban az esetben, amikor a Markov-folyamat csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel, elegendő a feltételes valószínűség egyszerű, a bevezető valószínűségszámítás előadásban is ismertett fogalmának az ismerete és használata. Az ilyen egyszerűbb Markov-folyamatokat Markov-láncoknak nevezik az irodalomban.

A következő eljárást fogom követni. Ismertetem a Markov-folyamat definicióját az általános esetben, de részletesen csak a Markov-láncok elméletét fogom tárgyalni, ahol sok érdekes és tanulságos kérdés megjelenik, viszont nincs szükség arra, hogy nehéz mértékelméleti problémákkal foglalkozzunk. Először megadom a Markov-folyamat általános definicióját. Egy Markov-folyamat alkalmas tulajdonságokkal rendelkező, speciális sztochasztikus folyamat, amely egy paramétertől függ, amelyet időnek fogok nevezni. Külön tárgyalom azt az esetet, amelyben ez a paraméter tartomány (idő) a nem negatív valós számok halmaza, az ilyen Markov-folyamatot folytonos idejű Markov-folyamatnak hívják, és azt az esetet, amikor a paraméter tartomány a pozitív egész számok halmaza. Az ilyen Markov-folyamatokat diszkrét idejű Markov-folyamatnak hívják.

Folytonos idejű Markov-folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely $(E, \mathcal{E})$ mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy $X(t)$ $(E, \mathcal{E})$-térbeli értékű folytonos idejű Markov-folyamat, ha minden $0 \le s \le t < \infty$ számpárra és $\mathcal{E}$-mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a*

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_u, u \le s))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_s)$ az X_s valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_u, u \le s)$ pedig az összes X_u, $u \le s$, valószínűségi változó által generált σ-algebrát jelöli.

Kissé általánosabban, legyen adva egy $(E, \mathcal{E})$ térbeli értékeket felvevő $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat, valamint σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_t$, $t \ge 0$, családja egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$, és legyen X_t $\mathcal{F}_t$-mérhető valószínűségi változó, $t \ge 0$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ reláció minden $t \ge 0$ számra. Az $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \ge 0$, rendszer folytonos idejű Markov-folyamat, ha

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) \quad \text{minden } 0 \le s \le t < \infty \text{ számra, és } A \in \mathcal{E} \text{ halmazra.}$$

Diszkrét idejű Markov-folyamat definiciója. *Legyen adva egy X_n, $n=0,1,\dots$, sztochasztikus folyamat valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely $(E,\mathcal{E})$ mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy X_n $(E,\mathcal{E})$-térbeli értékű diszkrét idejű Markov-folyamat, ha minden $0\le m\le n<\infty$ számra és $\mathcal{E}$-mérhető $A\in\mathcal{E}$ halmazra teljesül a*

$$P(X_n\in A|\mathcal{B}(X_m))=P(X_n\in A|\mathcal{B}(X_k,0\le k\le m))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_m)$ az X_m valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_k,0\le k\le m)$ pedig az összes X_k, $0\le k\le m$, valószínűségi változó által generált σ-algebrát jelöli.

Kissé általánosabban tekintsünk egy $(E,\mathcal{E})$ térbeli értékeket felvevő X_n, $n=0,1,\dots$, sztochasztikus folyamatot, és ezenkívül σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_n$, $n=0,1,\dots$, családját egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_m\subset\mathcal{F}_n$, ha $m\le n$, és legyen X_n $\mathcal{F}_n$-mérhető valószínűségi változó, $n=1,2,\dots$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{A}$ reláció minden $n=0,1,\dots$ számra. Az $(X_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2\dots$, rendszer diszkrét idejű Markov-folyamat, ha

$$P(X_n\in A|\mathcal{B}(X_m))=P(X_n\in A|\mathcal{F}_m)\qquad \textit{minden } 0\le m\le n<\infty \textit{ számra, és } A\in\mathcal{E} \textit{ halmazra.}$$

1. megjegyzés: Az $\mathcal{F}_t=\mathcal{B}(X_u,\,u\le t)$ illetve $\mathcal{F}_n=\mathcal{B}(X_k,\,k\le n)$ választással tekinthetjük a Markov-folyamatok időben folytonos illetve diszkrét definicióit az általános definició speciális eseteinek.

2. megjegyzés: A Markov-folyamatok definiciójában szereplő $P(X_t\in A|\mathcal{B}(X_s))$ illetve $P(X_n\in A|\mathcal{B}(X_m))$ feltételes valószínűségek megadhatóak, mint az $X_s=x$ illetve $X_m=x$ feltételek valamint az s és t illetve m és n időpontok és $A\in\mathcal{E}$ halmazok függvényei. A $P(X_t\in A|X_s=x)=P_{s,t}(x,A)$ illetve $P(X_n\in A|X_m=x)=P_{m,n}(x,A)$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E})$, $s\le t$ illetve $m\le n$ mennyiségeket átmenet valószínűségnek hívják. Ezek szemléletes tartalma a következő: A $P_{s,t}(x,A)$, illetve $P_{m,n}(x,A)$ átmenet valószínűség megadja annak valószínűségét, hogy a Markov-folyamat a t illetve n időpontban az A halmaz valamely pontjába jut, feltéve, hogy az az $s<t$ illetve $m<n$ időpontban az x pontban tartózkodott. A Markov tulajdonság azt jelenti, hogy ha tudom milyen módon jutott a Markov-folyamat az x pontba az s illetve m időpontban, akkor ez a plusz ismeret nem befolyásolja a fenti feltételes valószínűség értékét.

3. megjegyzés: A továbbiakban a Markov-folyamatokat azok $P_{s,t}(x,A)$, $0\le s<t$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, (a folytonos idejű) illetve $P_{m,n}(x,A)$, $0\le m\le n$, $m,n=0,1,2,\dots$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, átmenet valószínűség függvényekkel adjuk meg (a diszkrét idejű esetben). Az átmenet valószínűségek teljesítik a következő tulajdonságokat.

a) Rögzített $x\in E$ pontra $P_{s,t}(x,\cdot)$, illetve $P_{m,n}(x,\cdot)$ valószínűségi mérték az $(E,\mathcal{E})$ téren.

b) Rögzített $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P_{s,t}(\cdot, A)$ illetve $P_{m,n}(\cdot, A)$ mérhető függvény az $(E, \mathcal{E})$ téren.

c) $P_{s,s}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{s,s}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$. Hasonlóan, $P_{m,m}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{m,m}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$.

d) $P_{s,t}(x, A) = P(X_t(\omega) \in A | X_s(\omega) = x)$, azaz

$$P(X_t(\omega) \in A,\, X_s \in B) = \int_B P_{s,t}(x, A)\mu_s(\,dx),$$

minden $A \in \mathcal{E}$ és $B \in \mathcal{E}$ halmazra, ahol μ_s az X_s valószínűségi változó eloszlása. Hasonlóan $P_{m,n}(x, A) = P(X_n(\omega) \in A | X_m(\omega) = x)$.

Folytonos idejű Markov folyamatok esetén felteszünk még egy plusz feltevést, amely azt fejezi ki, hogy a Markov folyamat kis idő alatt keveset változik.

e) A Markov folyamat értékeit egy teljes szeparábilis metrikus térben veszi fel, (ahol van topológia), és $\lim\limits_{t \to s+0} P_{s,t}(x, A) = 1$ minden az x pontot tartalmazó nyílt A halmazra.

Ezek a tulajdonságok természetesek. Be lehet látni, hogy minden szép tulajdonságú téren definiált Markov-folyamatra (például ez a helyzet, ha $(E, \mathcal{E})$ teljes szeparábilis metrikus tér a szokásos Borel σ-algebrával) meg lehet adni a feltételes átmenetvalószínűségeket úgy, hogy teljesítsék a fenti tulajdonságokat. Ennek a ténynek a bizonyítását, amely a reguláris feltételes eloszlás létezésének a bizonyításán alapul nem tárgyalom.

Általában úgynevezett stacionárius Markov-folyamatokkal foglalkoznak az irodalomban. Ha nem hangsúlyozzák külön az ellenkezőjét, akkor Markov-folyamaton stacionárius Markov-folyamatot értenek. Mi is így fogunk tenni a továbbiakban. A stacionárius Markov-folyamatok definiciója a következő:

Stacionárius Markov-folyamat definiciója. *Egy X_t, $t \ge 0$, (vagy $(X_t, \mathcal{F}_t)$ általánosított) folytonos idejű Markov-folyamatot folytonos idejű stacionárius Markov-folyamatnak nevezünk, ha a folyamat átmenetvalószínűségei teljesítik a $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$ azonosságot, minden $0 \le s \le t$ számpárra, azaz a $P_{s,t}(x, A)$ átmenetvalószínűség csak az s és t időpont között eltelt időtől függ.*

Egy X_n, $n = 0, 1, \dots$, (vagy $X_n, \mathcal{F}_n$) általánosított) diszkrét idejű Markov-folyamatot diszkrét idejű stacionárius Markov-folyamatnak nevezünk, ha az átmenetvalószínűségei teljesítik a $P_{m,n}(x, A) = P_{n-m}(x, A)$ azonosságot minden $0 \le m \le n$ számpárra, azaz a $P_{m,n}(x, A)$ átmenetvalószínűség csak az m és n időpont között eltelt időtől függ.

Stacionárius Markov-folyamatok átmenetvalószínűségeinek definiciója. *Egy értékeit valamely $(E, \mathcal{E})$ mérhető téren felvevő X_t, $t \ge 0$, folytonos idejű stacionárius Markov-folyamat átmenetvalószínűségén a*

$$P(t, x, A) = P(X_{u+t} \in A | X_u = x) = P_{u,u+t}(x, A), \qquad t \ge 0, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $u \ge 0$ paramétertől.

Hasonlóképpen egy értékeit valamely $(E, \mathcal{E})$ mérhető téren felvevő X_n, $n = 0, 1, \dots$, diszkrét idejű stacionárius Markov-folyamat átmenetvalószínűségén a

$$P(n, x, A) = P(X_{n+m} \in A | X_m = x) = P_{m,n+m}(x, A), \quad n = 0, 1, \dots,\ x \in E,\ A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $m = 1, 2, \dots$ paramétertől.

Megjegyzés: *A stacionárius Markov-folyamatokra az előbb bevezetett $P(t, x, A)$ és $P(n, x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, átmenetvalószínűségek teljesítik a következő Chapman–Kolmogorov egyenletnek (vagy azonosságnak) nevezett azonosságokat:*

$$P(s + t, x, A) = \int P(t, y, A) P(s, x, dy) \quad \text{ha } s \ge 0 \text{ és } t \ge 0. \tag{1}$$

és

$$P(m + n, x, A) = \int P(n, y, A) P(m, x, dy) \quad \text{minden } m = 0, 1, \dots \text{ és } n = 0, 1, \dots \text{ számra.} \tag{2}$$

Ezenkívül a $P(t, x, A)$ illetve $P(n, x, A)$ átmenetvalószínűségek teljesítik az alábbi tulajdonságokat: Minden rögzített t illetve n időpontra és $x \in E$ pontra $P(t, x, \cdot)$ illetve $P(n, x, \cdot)$ valószínűségi mérték. Minden t illetve n időpontra és $A \in \mathcal{E}$ halmazra $P(t, \cdot, A)$ illetve $P(n, \cdot, A)$ mérhető függvények az $(E, \mathcal{E})$ téren. Továbbá mind a folytonos mind a diszkrét idejű Markov-folyamatok esetén teljesül a $P(0, x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P(0, x, A) = 0$, ha $x \notin A$ reláció. A felsorolt tulajdonságok jellemzik is a stacionárius Markov-folyamatokat, azaz minden (értékeit szép topológiai tulajdonságokkal rendelkező téren, (például teljes szeparábilis metrikus téren) felvevő stacionárius Markov-folyamathoz meg lehet adni a feltételes eloszlásokat a fenti tulajdonságokkal rendelkező átmenetvalószínűségekkel.

Valójában érvényes a Chapman–Kolmogorov egyenlet következő általánosabb alakja is nem feltétlenül stacionárius Markov folyamatokra:

$$P_{s,t}(x, A) = \int P_{u,t}(y, A) P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } 0 \le s \le u \le t. \tag{1'}$$

és

$$P_{m,n}(x, A) = \int P_{l,n}(y, A) P_{m,l}(x, dy) \quad \text{minden } 0 \le m \le l \le n, \text{ egész számhármasra.} \tag{2'}$$

A fent megfogalmazott, az irodalomban Chapman–Kolmogorov egyenletnek nevezett (1) illetve (2) azonosságok (és azok (1′) illetve (2′) általánosításai) nagyon természetes állítások. A Chapman–Kolmogorov egyenlet tekinthető a Markov-folyamatok elméletében a legfontosabb azonosságnak. Ennek precíz bizonyításához szükség van arra, hogy általános (Radon–Nykodim deriváltak segítségével definiált) feltételes valószínűségekkel számoljunk, illetve fel kell használni azt a tényt, hogy az átmenetvalószínűségek teljesítik a (2) képlet után megfogalmazott tulajdonságokat. Mivel az ilyen technikai részletek tárgyalását minimálisra kívánom szorítani, ezért ezt a számolást csak a kiegészítésben ismertetem. A számunkra legfontosabb esetben, amikor Markov-láncokat tekintünk, elvégzem ezt a lényegesen egyszerűbb számolást az előadás fő részében.

Megjegyzés. Legyen adva $P_{s,t}(x,A)$, $0 \le s < t < \infty$, $x \in E$ és $A \in \mathcal{E}$ az a)–d) tulajdonságot valamint az $(1')$ Chapman–Kolmogorov egyenletet teljesítő átmenet valószínűségek egy rendszere valamint egy μ_0 valószínűségi mérték az $(E,\mathcal{E})$ téren. Ekkor létezik olyan X_t, $t \ge 0$, értékeit az $(E,\mathcal{E})$ téren felvevő Markov folyamat, amelyre $P(X_0 \in A) = \mu_0(A)$ minden $A \in \mathcal{E}$ halmazra, és $P(X_t \in A | X_s = x) = P_{s,t}(x,A)$ minden $0 \le s < t < \infty$ időpontokra, $x \in E$ pontra és $A \in \mathcal{E}$ halmazra. Hasonló állítás érvényes időben diszkrét Markov folyamatokra is.

Ilyen X_t Markov folyamatokat definiálhatunk azon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ahol Ω a számegyenesen definiált függvények tere, $\mathcal{A}$ az $\{x(\cdot)\colon\, x(t_1) \in A_1, x(t_2) \in A_2, \dots, x(t_k) \in A_k\}$ alakú halmazok által generált σ-algebra, $X_t(\omega) = x(t)$, ha $\omega = x(\cdot)$, a P valószínűségi mértéket pedig a következő formula definiálja. Legyen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty$, $A_j \in \mathcal{E}$, $0 \le j \le k$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
&P(\{x(\cdot)\colon\, x(t_0) \in A_0, x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_k) \in A_k\}) \\
&\quad = \int_{A_0} \mu_0(\,dx_0) \biggl(\int_{A_1} P_{t_0,t_1}(x_0, dx_1) \biggl(\int_{A_2} P_{t_1,t_2}(x_1,\, dx_2) \cdots \\
&\qquad \biggl(\int_{A_{k-1}} P_{t_{k-2},t_{k-1}}(x_{k-2},\, dx_{k-1}) \biggl(\int_{A_k} P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1}, dx_k) \biggr) \biggr) \cdots \biggr) \biggr).
\end{aligned}
$$

Egy nem triviális mértékelméleti eredmény alapján (Tulcea–Ioniescu tétel) ilyen módon egy valószínűségi mértéket definiálunk. A Chapman–Kolmogorov egyenlet teljesülését azért kellett megkövetelni, mert ez biztosítja, hogy a definiált véges dimenziós eloszlások konzisztensek. (Például $P(X_{t_1} \in A, X_{t_3} \in B) = P(X_{t_1} \in A, X_{t_2} \in E, X_{t_3} \in B)$.) A részletek bizonyításától eltekintek.

Legyen adva egy diszkrét idejű Markov-folyamat, amely értékeit valamely $(E,\mathcal{E})$ téren veszi fel. A (2) reláció szerint a Markov-folyamat $P(x,A)$ átmenetvalószínűségei teljesítik a

$$
P(n+1,x,A) = \int P(1,y,A) P(n,x,\,dy) \qquad \text{minden } n = 0,1,\dots \text{ számra.} \tag{3}
$$

azonosságot. Ez azt jelenti, hogy ha megadjuk a $P(1,x,A)$ átmenetvalószínűségeket, akkor n szerinti indukcióval ki tudjuk számolni a $P(n,x,A)$ átmenetvalószínűségeket minden $n = 0,1,\dots$ számra.

Összefoglalásként megfogalmazom a következő állítást.

A Markov-folyamatok tulajdonságairól szóló állítások összefoglalása. *Legyen adva egy* $(X_t,\mathcal{F}_t)$, $t\ge 0$, *folytonos vagy egy* $(X_n,\mathcal{F}_n)$, $n=0,1,2,\dots$, *diszkrét idejű Markov-folyamat. (Feltesszük, hogy ez a Markov-folyamat egy szép topológiai tulajdonságokkal rendelkező téren veszi fel az értékeit.) Ekkor ennek a Markov-folyamatnak léteznek olyan* $P_{s,t}(x,A)$ *illetve* $P_{m,n}(x,A)$ *átmenetvalószínűségei, amelyek teljesítik a 3. megjegyzésben megfogalmazott a), b), c) és d) tulajdonságokat valamint az* $(1')$ *illetve* $(2')$ *formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenletet is.*

Igaz a fenti állítás következő itt nem bizonyított megfordítása is. Legyen adva $P_{s,t}(x,A)$, $0\le s\le t$, *vagy* $P_{m,n}(x,A)$, $\le m\le n$, *függvényeknek egy olyan rendszere, amely teljesíti a 3. megjegyzésben megfogalmazott a), b), c) és d) tulajdonságokat, (folytonos idő estén az e) tulajdonságot is) és az* $(1')$ *illetve* $(2')$ *formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenletet. Ez úgy értendő, hogy adva van egy* $(E,\mathcal{E})$ *tér, ahol* $\mathcal{E}$ *egy az* E *téren definiált* σ*-algebra, és a* $P_{s,t}(x,A)$ *illetve* $P_{m,n}(x,A)$ *függvények minden* $x\in E$ *pontra* $A\in\mathcal{E}$ *halmazra és* $0\le s\le t$ *valós, illetve* $0\le m\le n$ *egész számokra definiálva vannak. Ekkor létezik olyan* X_t, $t\ge 0$, *folytonos, illetve olyan* X_n, $n=0,1,2,\dots$, *diszkrét idejű, értékeit az* $(E,\mathcal{E})$ *térben felvevő Markov-folyamat, amelynek a* $P_{s,t}(x,A)$ *illetve a* $P_{m,n}(x,A)$ *függvények az átmenetvalószínűségei. Sőt, a 0 időpontbeli* X_0 *valószínűségi változó eloszlását tetszőleges módon előírhatjuk.*

A következő definicióban bizonyos az irodalomban elterjedt szóhasználatot vezetek be.

Markov-láncok definiciója. *Ha egy (folytonos vagy diszkrét idejű Markov-folyamat egy* $(E,\mathcal{E})$ *mérhető téren veszi fel az értékeit, akkor ezt az* $(E,\mathcal{E})$ *teret a Markov-folyamat állapotterének hívjuk. Egy olyan Markov folyamatot, amelynek állapottere egy véges vagy megszámlálható számosságú halmaz (a diszkrét topológiával) Markov-láncnak nevezzük. Ha* E_1, E_2, $\dots$ *jelöli a Markov lánc változói által felvett értékeket akkor képletben kifejezve egy diszkrét idejű stacionárius Markov lánc olyan sztochasztikus folyamat, amely teljesíti a*

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=E_{j_{n+1}}|X_n=E_{j_n},\dots,X_0=E_{j_0})&=P(X_{n+1}=E_{j_{n+1}}|X_n=E_{j_n})\\&=P(X_1=E_{j_{n+1}}|X_0=E_{j_n})\end{aligned}$$

azonosságot.

A továbbiakban (stacionárius) Markov-láncokkal fogunk foglalkozni, azokon belül is elsősorban diszkrét idejű Markov-láncokkal. A következő jelölést fogom használni. Jelölje az állapotokat $E_1,E_2,\dots$, és legyen $P(n,j,k)=P(X_{n+m}=E_k|X_m=E_j)$, $m=1,2,\dots$, $n=0,1,2,\dots$ azaz $P(n,j,k)$ annak feltételes valószínűsége, hogy a Markov-lánc az $n+m$ időpontban az E_k állapotba jut, feltéve, hogy az m időpontban az E_j állapotban volt. Használjuk továbbá a $P(j,k)=P(1,j,k)$ jelölést, azaz az 1-lépéses $P(1,j,k)$ átmenetvalószínűségekben hagyjuk el az 1 koordinátát. Felírom a Chapman–Kolmogorov egyenletet Markov-láncokra a fent bevezetett jelöléssel.

$$P(n+m,j,k)=\sum_l P(n,j,l)P(m,l,k) \tag{4}$$

ahol az összegzés végigfut az összes olyan l indexen, amelyre az E_l állapot létezik. Jelöléseink szerint vagy létezik egy olyan N pozitív egész szám, hogy $E_1, \dots, E_N$ az összes lehetséges állapotok halmaza, és ekkor $1 \le l \le N$ az összegzés a (4) formulában, vagy megszámlálható sok $E_1, E_2, \dots$ a lehetséges állapotok halmaza, és ekkor az összegezés $1 \le l < \infty$ indexelésre történik.

Lemma. *Egy diszkrét idejű stacionárius Markov-lánc teljesíti a (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenletet.*

A lemma bizonyítása.

$$\begin{aligned}
P(n+m, j, k) &= P(X_{n+m} = E_k | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, X_n = E_l | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, | X_n = E_l, X_0 = E_j) P(X_n = E_l | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, | X_n = E_l) P(X_n = E_l | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(m, l, k) P(n, j, l).
\end{aligned}$$

(E számolásban felhasználtuk a Markov tulajdonságból következő

$$P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_l, X_0 = E_j) = P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_l)$$

azonosságot.)

Feladat: Bizonyítsuk be a Chapman–Kolmogorov egyenletet diszkrét idejű nem feltétlenül stacionárius Markov-láncokra. Részletesebben megfogalmazva legyenek egy $E_1, E_2, \dots$ állapotokkal rendelkező diszkrét idejű $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc átmenetvalószínűségei $P_{m,n}(j,k) = E(X_n = E_k | X_m = E_j)$, $n \ge m \ge 0$, $j, k = 0, 1, \dots$. Minden $m \le r \le n$ időpontra igaz a következő azonosság:

$$P_{m,n}(j,k) = \sum_l P_{m,r}(j,l) P_{r,n}(l,k).$$

Bevezettük a (stacionárius) Markov láncok fogalmát, és definiáltuk Markov láncok $P(n, j, k) = P(X_{n+m} = E_k | X_m = E_j)$ átmenetvalószínűségeit. Láttuk, hogy ezek teljesítik a (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov azonosságot. Jegyezzük meg, hogy a Chapman–Kolomogorov azonosság alapján elegendő a $P(1, j, k)$ egy lépéses átmenetvalószínűségeket megadni, mert ezek segítségével a $P(n, j, k)$ mennyiségeket is kiszámolhatjuk tetszőleges $n = 1, 2, \dots$ számokra. A $P(1, j, k)$ átmenet valószínűségek teljesítik az alábbi relációkat:

$$\begin{gathered}
\sum_k P(1, j, k) = 1 \quad \text{minden } j \text{ indexre,} \\
\text{és } P(1, j, k) \ge 0 \text{ minden } j, k \text{ indexre,}
\end{gathered} \tag{5}$$

mert az E_j állapotból 1 valószínűséggel az E_k állapotok valamelyikébe jutunk.

Legyen adva egy $\mu(j)$ számsorozat, amelyre $\mu(j) \ge 0$ minden j-re, és $\sum\limits_j \mu(j) = 1$, továbbá egy az (5) formulát teljesítő$P(1,j,k)$ számrendszer. Ekkor létezik olyan $X_0, X_1, \dots$ (stacionárius) Markov-lánc, amelyre $P(X_0 = E_j) = \mu(j)$, és $P(X_{n+1} = E_k | X_n = E_j) = P(1,j,k)$, minden $= 0,1,2,\dots$ számra és E_j, E_k állapotra. Valóban, legyen

$$P(X_0 = E_{j_0}, X_1 = E_{j_1}, \dots, X_n = E_{j_n}) = \mu_0(j_0) \prod_{l=0}^{n-1} P(1, j_l, j_{l+1}).$$

Létezik ilyen véges dimenziós eloszlásokkal rendelkező sztochasztikus folyamat, és ez a kívánt tulajdonságokkal rendelkező Markov lánc.

Ha adva van egy (véges sok), N állapotot felvevő Markov-lánc, akkor ennek 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén a $P(j,k)$, $1 \le j,k \le N$, 1 lépéses átmenetvalószínűségeinek összességét, n-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén, $n = 1,2,\dots$, pedig a $P(n,j,k)$ valószínűségeinek összességét értjük. Természetes módon hozzárendelhetjük egy ilyen véges sok, N állapotot felvevő Markov-lánc átmenetvalószínűségeinek $P(j,k)$ rendszeréhez azt az $N \times N$ méretű négyzetes Π mátrixot, amelynek j-ik sorának és k-ik oszlopának a metszetében a $P(j,k)$ szám áll. Hasonlóan feleltessük meg egy ilyen mátrix n lépéses átmenet valószínűségei $P(n,j,k)$ rendszerének azt a Π_n mátrixot, amelynek j-ik sorának és l-ik oszlopának a metszetében a $P(n,j,k)$ szám áll. Érdemes bevezetni a sztochasztikus mátrix fogalmát, amely leírja az ily módon létrejövő mátrixokat.

Sztochasztikus mátrixok definiciója. *Egy $N \times N$ méretű $(P(j,k))$, $1 \le j,k \le N$, mátrixot sztochasztikus mátrixnak nevezünk, ha $P(j,k) \ge 0$, $1 \le j,k \le N$, a mátrix minden elemére, és $\sum\limits_{k=1}^{N} P(j,k) = 1$, $1 \le j \le N$, azaz a mátrix minden sorösszege eggyel egyenlő.*

A következő egyszerű észrevétel nagyon hasznos véges állapotterű Markov-láncok vizsgálatában.

Fontos észrevétel. *Egy sztochasztikus mátrix és egy olyan $\mu(j)$, a $\sum \mu(j) = 1$, $\mu(j) \ge 0$ feltételeket teljesítő számsorozat, amely ugyanazon a halmazon van definiálva mint a sztochasztikus mátrix elemei meghatároznak egy véges állapotterű Markov-láncot, amelynek a 0 pontbeli eloszlását a $\mu(j)$ számsorozat, az 1-lépéses átmenetvalószínűségeit pedig a sztochasztikus mátrix adja meg. Megfordítva, minden véges állapotterű Markov lánc átmenetmátrixainak rendszere egy sztochasztikus mátrix.*

Továbbá, a Markov-láncokról szóló (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov azonosságából következik, hogy ha egy mátrix 1-lépéses átmenetvalószínűségeit egy Π, az n-lépéses átmenetvalószínűségeit pedig egy Π_n sztochasztikus mátrix adja meg, akkor $\Pi_n = \Pi^n$, ahol Π^n a Π mátrix n-ik hatványát jelöli a szokásos mátrix szorzás értelmében.

A ‘Fontos észrevétel’ lehetővé teszi, hogy mátrix elméleti eredmények segítségével fontos eredményeket állapítsunk meg véges állapotterű Markov-láncok viselkedéséről. Ezt a módszert csak később fogom tárgyalni. A továbbiakban elsősorban a mind véges mind végtelen állapotterű (stacionárius) Markov-láncok viselkedéséről szóló alapvető eredmények ismertetésére fogok koncentrálni.

Mutatok néhány példát Markov-láncokra és folyamatokra.

Néhány érdekes Markov-folyamat és Markov-lánc definiciója.

1.) Tekintsünk egy véletlen bolyongást a d-dimenziós rácson, azaz a

$$Z = \{(j_1, \dots, j_d)\colon\ -\infty < j_s < \infty,\ j_s \text{ egész szám}, \quad 1 \le s \le d\}$$

halmazon. Ezt úgy definiáljuk, hogy ha a bolyongást végző részecske az n-ik időpontban a Z rács valamelyik pontjában tartózkodik, akkor a múltbeli viselkedéstől függetlenül egyforma, azaz $\frac{1}{2d}$ valószínűséggel átugrik valamelyik szomszédos rácspontba. Azaz, ha S_n-nel jelöljük a részecske tartozkódási helyét az n időpntban, akkor az $S_n - S_{n-1}$ valószínűségi változók, $n = 1, 2, \dots$, függetlenek, és $P(S_n - S_{n-1} = e_j) = P(S_n - S_{n-1} = -e_j) = \frac{1}{2d}$ minden $n = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le d$ számra, ahol e_j jelöli azt a vektort, amelynek j-ik koordinátája 1, és az összes többi koordinátája nulla. A definició teljessége érdekében még definiálnunk kell az S_0 mennyiséget is. Legyen $P(S_0 = x) = 1$, ahol $x \in Z$ a d-dimenziós tér valamely rögzített rácspontja.

2.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint elnyelő fallal.* Az előző példához hasonló modell a $d = 1$ esetben, amely bolyongást valamely $x \ge 0$ pontban indítunk el, azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor örökre ottmarad. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j+1) = P(j, j-1) = \frac{1}{2}$, ha $j \ge 1$, és $P(0, 0) = 1$ képletekkel adhatóak meg.

3.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint visszaverő fallal.* Az előző példához hasonló modell azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor onnan visszaverődik. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j+1) = P(j, j-1) = \frac{1}{2}$, ha $j \ge 1$, és $P(0, 1) = 1$ képletekkel adhatóak meg.

4.) *Véletlen bolyongás a modulo n csoporton.* Legyen a Markov-lánc állapottere az $\{1, \dots, n\}$ halmaz, valamely $n \ge 2$ pozitív egész számmal. Legyenek a Markov-lánc átmenetvalószínűségei $P(i, i+1) = P(i, i-1) = \frac{1}{2}$, ahol az összeadás és kivonás modulo n értendő.

5.) *A diffuzió Ehrenfest modellje.* Ez véges állapotterű Markov-lánc. E Markov-lánc függ egy N paramétertől, amely pozitív egész szám. Ha ez a paraméter N, akkor a modellben $N+1$ állapot van, $E_0, E_1, \dots, E_N$, és az átmenetvalószínűségek $P(k, k-1) = \frac{k}{N}$, $P(k, k+1) = \frac{N-k}{N}$, ha $1 \le k \le N$, és $P(0, 1) = 1$, $P(N, N-1) =$

0. E képletek szemléletes tartalma a következő: Legyen N részecske, amelyek mindegyike két urna valamelyikében van, és jelölje E_k azt az eseményt, hogy az első urnában k részecske, a második urnában $N-k$ részecske van. Minden egyes időpontban, kiválasztunk véletlenül egy részecskét, mindegyik részecskét egyforma valószínűséggel, és azt áthelyezzük a másik urnába. Ekkor, ha az első urnában k golyó van, akkor $P(k,k-1)=\frac{k}{N}$ annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét az első urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel csökken, és $P(k,k+1)=\frac{N-k}{N}$, annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét a második urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel nő.

6.) *Modell egy szerkezet élettartamára.* Legyen adva egy Markov-lánc a végtelen E_1, E_2, ... állapottéren, amelynek átmenetvalószínűségeit valamely $p_1,p_2,\dots$, $0\le p_k\le 1$, és $q_k=1-p_k$, $k=1,2,\dots$, számsorozat segítségével határozzuk meg a következő módon: $P(k,k+1)=p_k$, $P(k,1)=q_k$, $k=1,2,\dots$. E modell szemléletes tartalma a következő: Legyen adva egy szerkezet, amelyet minden időpontban, ha nem romlik el, akkor tovább használunk, és életkora egy egységgel nő. Ha elromlik, akkor kicseréljük egy új szerkezetre, amelynek életkora 1. Jelölje X_n azt a valószínűségi változót, amely megadja azt, hogy mennyi az n időpontban használt szerkezet életkora.

A következő példa az 1. példában szereplő bolyongás természetes általánosítása.

7.) Legyen $X_1,X_2,\dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket valamely E lineáris térben (például az R^k k-dimenziós Euklideszi térben) veszik fel. Tegyük fel, hogy az $X_1,X_2,\dots,$ valószínűségi változók értékei egy megszámlálható $T\subset E$, $T=\{t_1,t_2,\dots\}$, halmazban vannak, azaz $P(X_1\in T)=1$. Definiáljuk az $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$, $n=1,2,\dots,$ részletösszegeket, és jelölje $S\subset E$ a T halmaz által generált (additív) csoportot, azaz legyenek az S halmaz elemei azok az $s\in E$ pontok, amelyek előállíthatóak $s=\sum\limits_{j=1}^{k}p_jt_j$, $k=1,2,\dots,$ $t_j\in T$, $1\le j\le k$, alakban, ahol $p_1,p_2,\dots$ egész számok. Ekkor $S_1,S_2,\dots,$ Markov-lánc az S állapottéren, és átmenetvalószínűségeit a $P(S_{n+1}=\bar s|S_n=s)=P(X_1=\bar s-s)$, $s,\bar s\in S$, képlet adja meg. Ugyancsak Markov-láncot alkotnak ugyanezen a téren és ugyanezekkel az átmenetvalószínűségekkel az $\bar S_n=S_n+t_j$, $n=1,2,\dots,$ sorozatok is, ahol $t_j\in T$ tetszőleges szám.

Valóban,

$$\begin{aligned}P(S_{n+1}=s_{n+1}|S_n=s_n,\dots,S_1=s_1)&=\frac{P(S_{n+1}=s_{n+1},S_n=s_n,\dots,S_1=s_1)}{P(,S_n=s_n,\dots,S_1=s_1)}\\
&=\frac{P(X_{n+1}=s_{n+1}-s_n,X_n=s_n-s_{n-1},\dots,X_1=s_1)}{P(X_n=s_n-s_{n-1},\dots,X_1=s_1)}\\
&=P(X_{n+1}=s_{n+1}-s_n)=P(X_1=s_{n+1}-s_n).\end{aligned}$$

Érvényes a 7.) példa alábbi természetes általánosítása tetszőleges (nem feltétlenül megszámlálható sok értéket felvevő) valószínűségi változók részletösszegeire. Az általánosítás bizonyítása annyiban nehezebb, hogy abban általános értelemben vett feltételes valószínűségekkel kell számolni.

8.) Legyenek $X_1, X_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely $(E, \mathcal{E})$ lineáris térben veszik fel. Ekkor az $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$, $j = 1, 2, \dots,$ részletösszegek (stacionárius) Markov-folyamatot alkotnak az $(E, \mathcal{E})$ téren, amelynek 1 lépéses átmenetvalószínűségeit a $P(1, x, A) = P(S_{n+1} \in A | S_n = x) = P(X_1 \in A - x)$ képlet adja meg.

Nem kötelező feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 8. példa állítása valóban igaz.

Külön feladatban megfogalmazom azt a feltételes eloszlásokról szóló állítást, amely az előző feladat megoldásának a lényege.

Feladat: Legyenek $X_1, \dots, X_k, Y$ független valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely $(E, \mathcal{E})$ téren veszik fel, $f(x_1, \dots, x_{k+1})$ egy k-változós mérhető (korlátos) függvény az $(E, \mathcal{E})$ téren. Ekkor

$$E(f(X_1, \dots, X_k, Y) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = Ef(x_1, \dots, x_k, Y).$$

Vegyük észre, hogy az előző feladat eredményéből, (amely egyébként tekinthető a Fubini tétel egy verziójának) következik a 8. példa állítása. Valóban, ezt felhasználva meg lehet mutatni, hogy

$$\begin{aligned} &P(S_{n+1} \in A | S_1 = x_1, S_2 = x_2, \dots, S_n = x_n) \\ &\qquad = P(X_1 + \cdots + X_n + Y \in A | X_1 = x_1, X_2 = x_2 - x_2, \dots, X_n = x_n - x_{n-1}) \\ &\qquad = P(x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + Y \in A) = P(X_1 \in A - x_n) \end{aligned}$$

ahol, $X_1, \dots, X_n, Y)$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely $(E, \mathcal{E})$ lineáris térben veszik fel.

9.) Végül mutatok példát valószínűségi változók egy olyan sorozatára, amely nem alkot Markov-láncot. Legyen adva egy urna és benne mondjuk 5 piros és 3 fehér golyó. Kihúzunk az urnából egy golyót véletlenszerűen, majd dobjuk vissza azt az urnába egy ugyanolyan színű golyóval együtt. Folytassuk ezt a procedurát a végtelenségig, és definiáljuk az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változókat úgy, hogy $X_n = 1$, ha a n-ik húzáskor kihúzott golyó színe piros, és $X_n = 0$, ha az n-ik húzáskor kihúzott golyó színe fehér. Ekkor nyílvánvalóan $P(X_n = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{n-1} = 1) > P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1)$, mert ha minden eddigi húzás eredménye piros színű golyó volt, akkor az urnában levő piros golyók számát növeltük, ezért nagyobb annak a valószínűsége, hogy a következő húzásban is piros golyót húzunk.

Kiegészítés.

Megfogalmazok és bebizonyítok egy lemmát, amelynek fő mondanivalója az a (B) azonosság, amely szerint egy stacionárius Markov-folyamat teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenletet. Valójában ez egy általánosabb változata a Chapman–Kolmogorov egyenletnek, amely nem feltétlenül stacionárius Markov folyamatokra is érvényes.

Stacionárius Markov-folyamatok esetében $P_{s,t}(x,A) = P_{t-s}(x,A)$, $P_{u,t}(y,A) = P_{t-u}(y,A)$, $P_{s,u}(x,\,dy) = P_{u-s}(x,\,dy)$, és a (B) reláció megegyezik a Chapman–Kolmogorov egyenlettel.

Lemma. *Legyen $(X_t,\mathcal{F}_t)$, $t\ge 0$, Markov-folyamat valamely a $(E,\mathcal{E})$ mérhető téren valamely $P_{s,t}(x,A)$ a 3. megjegyzésban szereplő a), b), c) és d) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az $(E,\mathcal{E})$ téren. Ekkor*

$$E(f(X_u)|X_s=x)=\int f(y)P_{s,u}(x,dy)\quad \textit{ha } u\ge s \tag{A}$$

és

$$P_{s,t}(x,A)=\int P_{u,t}(y,A)P_{s,u}(x,\,dy)\quad \textit{ha } s\le u\le t \tag{B}$$

Bizonyítás: Ha az f függvény egy A halmaz indikátor függvénye, akkor könnyen látható, hogy az (A) formula érvényes. Mivel a kifejezés mindkét oldala lineáris funkcionál az $(E,\mathcal{E})$ téren definiált korlátos és mérhető függvények terén, ezért az azonosság érvényes halmazok indikátor függvényeinek lineáris kombinációira is. Ezután ilyen függvényekkel végrehajtott közelítések segítségével kapjuk, hogy az (A) reláció tetszőleges f függvényre érvényes. Az (A) formula szemléletesen azt mondja ki, hogy feltételes várható értéket úgy számolhatunk ki feltételes eloszlásfüggvények segítségével, mint várható értéket eloszásfüggvények segítségével.

A (B) formula bizonyításában felhasználhatjuk, hogy a Markov tulajdonság és a feltételes várható érték tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned}P_{s,t}(x,A)&=P(X_t\in A|X_s=x)=E(I_{\{X_t(\omega)\in A\}}|X_s(\omega)=x)\\&=E(E(I_{\{X_t(\omega)\in A\}}|X_s(\omega),X_u(\omega))|X_s(\omega)=x)\\&=E(E(I_{\{X_t(\omega)\in A\}}|X_u(\omega))|X_s(\omega)=x)=E(P_{u,t}(X_u(\omega),A)|X_s(\omega)=x),\end{aligned}$$

ahol I_A egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. A fenti számolásban kihasználtuk a Markov tulajdonságot, amely szerint

$$E(I_{\{X_t\in A\}}|X_s,X_u)=E(I_{\{X_t\in A\}}|X_u)=P_{u,t}(X_u(\omega),A),$$

ha $u\ge s$.

Vezessük be az $f(y)=P(X_t\in A|X_u=y)=P_{u,t}(A,y)$ függvényt. Az előző azonosság és az A) reláció alapján

$$P_{s,t}(x,A)=E(E(f(X_u)|X_s=x)=\int P_{u,t}(A,y)P_{s,u}(dy,x),$$

amint állítottuk.

Kimondom e tétel diszkrét idejű megfelelőjét, amelyet hasonlóan bizonyíthatunk.

Lemma. *Legyen* $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots,$ *Markov-folyamat valamely a* $(E, \mathcal{E})$ *mérhető téren valamely* $P_{m,n}(x, A)$ *a 3. megjegyzésben szereplő a), b), c) és d) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen* $f(y)$, *korlátos, mérhető függvény az* $(E, \mathcal{E})$ *téren. Ekkor*

$$E(f(X_n)|X_m = x) = \int f(y) P_{m,n}(x, dy) \quad \text{ha } n \geq m \tag{A$'$}$$

és

$$P_{m,n}(x, A) = \int P_{k,n}(y, A) P_{m,k}(x,\, dy) \quad \text{ha } m \leq k \leq n. \tag{B$'$}$$

Feladat: Ha $(X_0, X_1, \dots)$ olyan a természetes számokkal indexelt sztochasztikus folyamat egy megszámlálható számosságú $(E, \mathcal{E})$ állapottéren, amely teljesíti az

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}}|X_n = E_{j_n}, \dots, X_0 = E_{j_0}) &= P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}}|X_n = E_{j_n}) \\ = P(X_1 = E_{j_{n+1}}|X_0 = E_{j_n}) \end{aligned}$$

azonosságot, akkor $(X_0, X_1, \dots)$ (stacionárius) Markov-lánc, amelynek egy lépéses átmenetvalószínűségeit

a $P(j, k) = P(X_1 = E_j|X_0 = E_k)$ képlet adja meg.

(A feladat tartalma mindössze annyi, hogy a feltételes valószínűségekre a Markov-folyamatok definiciójában kirótt feltétel az adott esetben ezt az azonosságot jelenti.)

Bizonyítás nélkül közlöm a következő eredményt.

Tétel. *Legyen adva egy a 3. megjegyzésben felsorolt a), b) és c) tulajdonságokat teljesítő* $P_{s,t}(x, A)$ *illetve* $P_{m,n}(x, A)$ *függvény amely teljesíti az (e) illetve (e$'$) tulajdonságot is. Legyen továbbá adva valamely* P_0 *valószínűségi mérték az* $(E, \mathcal{E})$ *téren. Ekkor létezik olyan időben folytonos Markov-folyamat, amelyre* $P(X_0 \in A) = P_0(A)$ *és* $P(X_t \in A|X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $m \leq n$ *választással. Létezik olyan időben diszkrét Markov-folyamat, amelyre* $P(X_0 \in A) = P_0(A)$, *és* $P(X_n \in A|X_m = x) = P_{s,t}(x, A)$ *minden* $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $0 \leq m \leq n$ *választással.*