Diszkrét idejű Markov-láncok vizsgálata.

Tekintsünk egy diszkrét idejű $X_0, X_1, \dots$ Markov-láncot $P(j,k) = P(X_{n+1} = E_k | X_n = j)$, $n = 1, 2, \dots$, átmenetvalószínűségekkel egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amely bizonyos $E_1, E_2, \dots$ értékeket vesz fel. Elsősorban a következő kérdésekre vagyunk kiváncsiak.

a) Milyen $P(j,k)$ átmenetvalószínűségek esetében mondhatjuk azt, hogy a Markov-lánc az E_j állapotból kiindulva 1 valószínűséggel (végtelen sokszor) visszatér az E_j állapotba? (Mint látni fogjuk, ha a Markov-lánc 1 valószínűséggel visszatér az E_j állapotba, akkor az is igaz, hogy 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér oda.)

b) Tekintsük egy $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc E_j állapotát, és a $P(n,j,j) = P(X_n = E_j | X_0 = E_j)$ n-lépéses átmenetvalószínűségeket. Létezik-e a $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,j)$ határérték? Ha létezik meg tudjuk-e adni ezt a határértéket viszonylag egyszerű módon? Léteznek-e és jellemezhetőek-e a $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,k) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$ határértékek?

c) Mondhatjuk-e, hogy amennyiben E_j és E_k két olyan állapot, amelyekre teljesül az a tulajdonság, hogy a Markov-lánc pozitív valószínűséggel jut el az az E_j állapotból az E_k állapotba, illetve az E_k állapotból az E_j állapotba (alkalmas számú lépésben) akkor a Markov-láncot az E_j illetve E_k állapotból elindítva egyszerre igaz vagy nem igaz az, hogy a Markov-lánc végtelen sokszor visszatér illetve csak véges sok alkalmommal tér vissza oda; egyszerre léteznek vagy nem léteznek pozitív $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,j) > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,k,k) > 0$ határértékek? Általánosabban, fel tudjuk-e osztani a Markov-lánc állapotterét annak alapján, hogy mely állapotból mely állapotba lehet eljutni pozitív valószínűséggel természetes módon osztályokra úgy, hogy az egy osztályban levő elemeknek sok fontos hasonló tulajdonsága van?

E kérdések tárgyalása előtt érdemes bevezetni néhány fogalmat és mennyiséget.

Markov-lánc rekurrens és tranziens állapotának fogalma. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ egy Markov-lánc egy $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc E_j állapota* rekurrens, *ha a Markov-láncot az E_j állapotból indítva, azaz ha $P(X_0 = E_j) = 1$, a Markov-lánc 1 valószínűséggel visszatér valamikor az E_j állapotba. Ez azt jelenti, hogy*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega\colon X_n(\omega) = E_j\}\right) = 1.$$

A Markov-lánc E_j állapota tranziens, *ha a Markov-láncot az E_j állapotból indítva, az 1-nél kisebb valószínűséggel tér vissza valamikor az E_j állapotba, azaz*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega\colon X_n(\omega) = E_j\}\right) < 1.$$

Markov-lánc egy állapotának a periódusa. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ egy Markov-lánc egy $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$, állapottéren, és jelölje $P(n,j,k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$, az n-lépéses átmenetvalószínűségeket. Vezessük be az $\mathcal{A}(j) = \{n\colon P(n,j,j) > 0\}$, halmazokat, azaz azon n indexek halmazát, amelyekre a $P(n,j,j)$ átmenetvalószínűség szigorúan pozitív. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc E_j állapotának periódusa l, ha az $\mathcal{A}(j)$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója l. Ha ez a legnagyobb közös osztó 1, akkor a Markov-lánc E_j állapotát aperiódikusnak nevezzük. (Ha a $\mathcal{A}(j)$ halmaz üres, azaz a Markov-lánc 1 valószínűséggel soha nem tér vissza az E_j állapotba, akkor nem definiáljuk az E_j halmaz periódusát.)*

(Egyszerű) feladat. Egy a d-dimenziós tér egész koordiátájú pontjaiból álló rácson történő bolyongás periódusa 2.

Legyen $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc egy $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$, állapottéren, és jelölje $P(n,j,k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$, az n-lépéses átmenetvalószínűségeket. Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$f_j(n) = P(X_n = E_j, X_m \neq E_j, \text{ ha } 1 \le m < n | X_0 = E_j), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

azaz $f_j(n)$ annak a valószínűsége, hogy az E_j állapotból indított Markov-lánc n lépés múlva tér vissza először az E_j állapotba. Nyílván az E_j állapot akkor és csak akkor rekurrens, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(n) = 1$. Ha az E_j állapot rekurrens, akkor vezessük be a

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n) \tag{2}$$

mennyiségeket is. A μ_j mennyiség egyenlő az E_j állapotba való első visszatérés idejének a várható értékével. Mint majd látni fogjuk, a μ_j mennyiség szoros kapcsolatban van a (létező) $\lim\limits_{n \to \infty} P(n,j,j)$ határértékkel.

Vezessük be a

$$P_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,j,j) x^n, \quad F_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_j(n) x^n \tag{3}$$

hatványsorokat, ahol $P(0,j,j) = 1$, $f_j(0) = 0$ definició szerint. Ezek a hatványsorok konvergálnak $|x| < 1$ esetében. Vegyük észre, hogy $P(n,j,j) = f_j(n)P(0,j,j) + f_j(n-1)P(1,j,j) + f_j(n-2)P(2,j,j) + \dots + f_j(1)P(n-1,j,j)$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Innen, illetve a $P(0,j,j) = 1$ és $f_j(0) = 0$ relációkból következik, hogy

$$F_j(x)P_j(x) = P_j(x) - 1. \tag{4}$$

A (4) azonosság segítségével be fogjuk látni a következő tételt.

Tétel Markov-láncok rekurrens és tranziens állapotainak jellemzéséről. *Legyen $X_0, X_1, \dots,$ Markov-lánc, $E_1, E_2, \dots$ állapotokkal, és jelölje $P(n,j,k) = P(X_n =$*

$E_k|X_0 = E_j)$ a Markov-lánc átmenetvalószínűségeit. A Markov-lánc E_j állapota rekurrens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,j,j) = \infty,$$

tranziens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,j,j) < \infty.$$

Ha az E_j állapot rekurrens, akkor a Markov-lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor tér vissza az E_j állapotba. Ha az E_j állapot tranziens, akkor a Markov-lánc 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza az E_j állapotba.

A tétel utolsó állítása a következőt mondja. Ha egy az E_j állapotból induló Markov-lánc 1 valószínűséggel tér vissza az E_j állapotba, akkor 1 valószínűséggel végtelen sokszor tér vissza az E_j állapotba. Míg abban az esetben, ha a visszatérés valószínűsége szigorúan kisebb, mint egy, akkor nulla annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc végtelen sokszor tér vissza az E_j állapotba.

Bizonyítás: A (4) reláció, illetve annak a ténynek az alapján, hogy $F_j(x)$ és $P_j(x)$ nem-negatív együtthatós hatványsorok, kapjuk, hogy minden $N \ge 1$ számra

$$\sum_{n=1}^{N} f_j(n) \le \lim_{x\to 1} F_j(x) = 1 - \lim_{x\to 1} \frac{1}{P_j(x)} \le \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n).$$

Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n,j,j) = K < \infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{N} f_j(n) \le 1 - \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{P_j(x)} \le 1 - \frac{1}{K}$ minden $N = 1,2,\dots,$ számra, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(n) < 1$, és az E_j állapot tranziens. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n,j,j) = \infty$, akkor $1 \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(n) \ge 1 - \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{P_j(x)} = 1$, tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(n) = 1$, és az E_j állapot rekurrens.

A tétel bizonyításának befejezéséhez elegendő belátni, hogy mivel $F_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j(n)$ annak a valószínűsége, hogy az E_j állapotból induló Markov-lánc legalább 1-szer visszatér az E_j állapotba, F_j^k annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc legalább k-szor visszatér az E_j állapotba. Innen ugyanis következik, hogy annak valószínűsége, hogy a Markov lánc végtelen sokszor tér vissza az E_j állapotba $\lim\limits_{k\to\infty} F_j^k$, és ez 1, ha $F_j = 1$, és nulla ha $F_j < 1$. Ezt az állítást k szerinti teljes indukcióval fogjuk belátni.

Az indukciós feltevés $k = 1$ esetben érvényes. Jelölje $f_j^{(k)}(n)$ annak a valószínűségét, hogy a Markov-lánc az n időpontban tér vissza a k-ik alkalommal az E_j állapotba. Az, hogy az indukciós feltevés érvényes k-ra azt jelenti, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j^{(k)}(n) = F_j^k$. Annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc legalább $k+1$-szer visszatér az E_j állapotba kifejezhető, mint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_j^{(k)}(n) f_j(m) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j^{(k)}(n)\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_j(m)\right) = F_j^{k+1}$. A tétel bizonyítását befejeztük.

Érdemes megfogalmazni a fenti eredmény következő Pólya tétel néven ismert híres következményét.

Pólya György tétele véletlen bolyongások visszatéréséről. *Tekintsük a véletlen bolyongást a d-dimenziós egész rácson, azaz tekintsünk egy olyan $X_0, X_1, \dots,$ Markov-láncot a d-dimenziós tér egész koordinátájú pontjain, amelyre $P(X_0 = (0, \dots, 0))$, az $X_{n+1} - X_n$ valószínűségi változók függetlenek, $P(X_{n+1} - X_n = e_j) = P(X_{n+1} - X_n = -e_j) = \frac{1}{2d}$, $j = 1, \dots, d$, $n = 0, 1, \dots,$ ahol e_j azt a d-dimenziós vektort jelöli, amelynek j-ik koordinátája 1, és összes többi koordinátája nulla. A véletlen bolyongás $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér az origóba, $d \geq 3$ dimenzióban 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza oda.*

Megjegyzés: Micheal Keane amerikai matematikus a következő humoros, de a lényeget jól kifejező interpretációját adta a Pólya tételnek: Egy részeg ember előbb-utóbb biztos, hogy hazatalál, de egy részeg madár nem feltétlenül.

A Pólya tétel bizonyítása. Az előző tétel alapján elég belátni azt, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n, 0, 0) = \infty$ egy d-dimenziós véletlen bolyongás átmenet valószínűségeire, ha $d = 1$ vagy $d = 2$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n, 0, 0) < \infty$, ha $d \geq 3$. Ezen relációk megmutatásához elég belátni, hogy $P(2n, 0, 0) \sim Kn^{-d/2}$ alkalmas $K = K(d) > 0$ együtthatóval minden $n = 1, 2, \dots,$ paraméterre és $d = 1, 2, \dots$ dimenzióra. (Jegyezzük meg, hogy $P(2n+1, 0, 0) = 0$, azaz páratlan sok lépésben nem térhetünk vissza az origóba). Viszont ismert az úgynevezett lokális centrális határeloszlástétel, amely jelen esetben azt fejezi ki, kissé felületesen megfogalmazva, hogy a $P(X_n = k)$ valószínűségek úgy viselkednek, mint ahogy azt a centrális határeloszlástétel sugallja.

Felírhatjuk az $X_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} (X_j - X_{j-1})$ relációt, ahol az összegben független és (ismert) egyforma eloszlású valószínűségi változók szerepelnek. Ez lehetővé teszi, hogy a centrális határeloszlástétel bizonyításához hasonlóan, (valójában egyszerűbben), jó aszimptotikus relációt írjunk fel annak valószínűségére, hogy az X_n valószínűségi változó adott értéket vesz fel. Most csak a számunkra a jelen feladatban érdekes formulát látjuk be. Nevezetesen azt, hogy amennyiben $Y_k = X_k - X_{k-1}$, $k = 1, \dots, 2n$ független d-dimenziós térbeli értékeket felvevő valószínűségi változók, $P(Y_k = e_j) = P(Y_k = -e_j) = \frac{1}{2d}$, $j = 1, \dots, d$, $k = 1, \dots, 2n$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} n^{-d/2} P(X_{2n} = 0) \lim_{n \to \infty} n^{-d/2} P(Y_1 + \cdots + Y_{2n} = 0) = \frac{2d^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}}, \tag{5}$$

Innen következik Pólya György tétele.

Az (5) reláció bizonyításának részleteit elhagyom, Csak rövid magyarázatot adok arra, honnan lehet látni, hogy egy ilyen aszimptotikus formula érvényes, illetve, mi a bizonyítás alapgondolata. A részletek kidolgozása szorgalmi feladat.

Az (5) képlet bizonyos értelemben a centrális határeloszlástétel lokális alakjának tekinthető. A centrális határeloszlástétel bizonyítása azon múlik, hogy az X_{2n} véletlen független összeg $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényére, illetve annak normalizáltjára jó aszimptotikus becslést tudunk adni. Jelen esetben a karakterisztikus függvény egy $\varphi_n(t_1,\dots,t_d) = c_n(k_1,\dots,k_d)e^{i(k_1t_1+\cdots+k_dt_d)}$ alakú (több-változós) Fourier sor, amelynek tagjai $c_n(k_1,\dots,k_d)e^{i(k_1t_1+\cdots+k_dt_d)}$ alakú függvények, ahol $k_1,\dots,k_d$ egész számok, és $k_1+\cdots+k_d$ páros szám. Továbbá a függetlenség miatt $\varphi_n(t_1,\dots,t_d) = \bar\varphi^{2n}(t_1,\dots,t_d)$, ahol $\bar\varphi(t_1,\dots,t_d) = \frac{1}{2d}\sum\limits_{j=1}^{d}(e^{it_j}+e^{-it_j})$. Így a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvény kiszámolható. Ezért felhasználva, hogy a Fourier sor tagjaiban szereplő függvények ortogonálisak a $K = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[-\pi,\pi]^{d-1}$ d-dimenziós téglatesten, (mely állítást külön igazolni kell,) a $c_n(0,\dots,0)$ Fourier együtthatót, ami egyenlő a $P(X_{2n}=0)$ valószínűséggel, ki lehet fejezni a Fourier sor integráljának a segítségével a K téglatesten. Ez, mivel a Fourier sor értékére jó aszimptotikus formulánk van, lehetővé teszi az (5) képlet igazolását. Ennek a számolásnak a fő lépése annak megmutatása, hogy a tekintendő integrál lényegében az origó egy kis környezetébe van koncentrálva, ahol az integrandusra jó aszimptotikus formulát lehet adni.

Magát a végeredményt előre megsejthetjük. A keresett valószínűség közelítőleg egyenlő a megfelelő kovarianciájú, 0 várható értékű normális sűrűségfüggvény integráljával a K téglatesten. Ráadásul, mivel a kovariancia mátrix (nagy n index esetén) nagy, ezért kis hibát követünk el, ha a K téglatest helyett az egész téren integrálunk.

Rátérek a b) kérdés tárgyalására, annak vizsgálatára, hogy mennyivel egyenlő egy Markov-lánc átmeneteinek $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,j)$ határértéke (feltéve, hogy ez a határérték létezik), illetve az így kapott eredményből milyen következtetéseket tudunk levonni a $P(n,j,k)$ átmenetvalószínűségek aszimptotikus viselkedésére nagy n paraméter esetén. A vizsgálat elején csak aperiódikus E_j állapotokat vizsgálunk. Ha ezek viselkedését jól le tudjuk írni, akkor az általános eset vizsgálata viszonylag egyszerűen visszavezethető erre.

A vizsgálat kulcslépése a valószínűségszámítás egyik érdekes eredményének az úgynevezett felújítási tételnek az alkalmazása. Ezt az eredményt az előadásban nem bizonyítom, csak elmagyarázom, hogy szemléletesen nagyon természetes. (A kiegészítésben ismertetem ennek az eredménynek egy lehetséges bizonyítását William Feller: Bevezetés a Valószínűségszámításba című könyve XIII. fejezetének 11. pontjában leírt bizonyítás alapján.)

Felújítási tétel. *Legyen $Y_1, Y_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású, (szigorúan) pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók sorozata. Jelölje $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j$, $n=1,2,\dots,$ a tekintett valószínűségi változók részletösszegeit, és $\mathcal{A} = \{m\colon P(Y_1=m)>0\}$, azaz azon egész számok halmazát, amelyeket az Y_1 valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Jelölje továbbá $\mu = \sum\limits_{j=1}^{\infty} jP(Y_1=j)$ az Y_1 valószínűségi változó várható értékét. Ekkor a következő aszimptotikus formulát érvényes annak valószínűségére, hogy valamelyik S_m*

részletösszeg felvesz egy előre rögzített nagy n értéket:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega\colon \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m(\omega)=n\right)=\frac{1}{\mu}. \tag{6}$$

A (6) reláció mind $\mu<\infty$, mind $\mu=\infty$ esetben fennáll. Utóbbi esetben ez a képlet a $\frac{1}{\infty}=0$ jelöléssel érvényes.

A felújítási tétel segítségével be fogjuk látni a következő tételt.

Tétel Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről. *Legyen $X_0,X_1,\dots$ olyan Markov-lánc $P(n,i,j)=P(X_n=E_j|X_0=E_i)$ átmenetvalószínűségekkel, amelyben az E_j állapot rekurrens és aperiódikus. Ekkor teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty} P(n,j,j)=\frac{1}{\mu_j} \tag{7}$$

azonosság, ahol a μ_j mennyiség a (2) formulában van definiálva. A (7) képlet speciálisan azt is állítja, hogy ha $\mu_j=\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,j)=0$.

Először elmagyarázom a felújítási tétel szemléletes tartalmát, majd azt, hogy hogyan lehet ennek segítségével az ezt követő tételt belátni.

Természetes azt várni, hogy hogy a független, pozitív egész értékű valószínűségi változók $S_1,S_2,\dots$, részletösszegei körülbelül ugyanolyan valószínűséggel vesznek fel valamilyen indexre minden elég nagy n számot. (Ahhoz, hogy ez a tulajdonság teljesüljön fel kellett tenni, hogy a tételben definiált $\mathcal{A}$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Ezzel kapcsolatban lásd a következő feladatot.) Ez azt sugallja, hogy ha megjelöljük azokat a (véletlen) pontokat, amelyeket az $S_1(\omega),S_2(\omega),\dots$ részletösszegek meglátogatnak, akkor a megjelölt pontok halmazának az összes pozitív egész számok halmazában van valamilyen sűrűsége, és a (6) képlet baloldalán szereplő kifejezésnek ez a sűrűség a (létező) limesze. Viszont ezt a sűrűséget könnyen kiszámolhatjuk. Ugyanis a nagy számok törvénye alapján $\frac{S_n}{n}$ értéke tart a μ számhoz 1 valószínűséggel, ha $n\to\infty$. Ez azt jelenti, hogy nagy n indexre van egy olyan $[1,A_n]$ intervallum, (véletlen A_n végponttal), amelyre $A_n\sim n\mu$, és az $[1,A_n]$ intervallumban pontosan n megjelölt pont van. Ezért a megjelölt pontok sűrűsége $\frac{1}{\mu}$.

Feladat. Legyenek $Y_1,Y_2,\dots$ független, egyforma eloszlású, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók. Tekintsük a felújítási tétel megfogalmazásában definiált $\mathcal{A}=\{m\colon P(Y_1=m)>0\}$ halmazt. Mutassuk, meg hogy ha a $\mathcal{A}$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1, akkor létezik olyan (az $\mathcal{A}$ halmaztól függő) N_0 küszöbszám, és olyan $a_1,\dots,a_k\in\mathcal{A}$ számok, hogy minden $n\ge N_0$ szám felírható $n=r_1a_1+\dots+r_ka_k$ alakban, ahol $r_1,\dots,r_k$ szigorúan pozitív egész számok. Ezért annak valószínűsége, hogy $\sum\limits_{j=1}^{M} Y_j=n$ valamilyen $M\ge 1$ számra, ha $n\ge N_0$, szigorúan pozitív.

Segítség. Vegyük észre, hogy bizonyos számelméleti eredmények alapján igaz a következő állítás: Ha $a_1, \dots, a_k$ egész számok legnagyobb közös osztója 1, akkor az $s_1 a_1 + \cdots + s_k a_k = 1$ reláció teljesül alkalmas $s_1, \dots, s_k$ egész, de nem feltétlenül pozitív számokkal. Ha $R(a_1 + \cdots + a_k) \le n < (R+1)(a_1 + \cdots + a_k)$, akkor írjuk fel az n számot $n = R(a_1 + \cdots + a_k) + [n - R(a_1 + \cdots + a_k)]$ alakban, és alkalmazzuk a fenti eredményt.

A fenti heurisztikus gondolatmenet mutatja, miért hihető, hogy a felújítási tétel igaz. Másrészt, egy az alább megfogalmazott lemma eredménye szerint ha egy valamely E_j rekurrens és aperiódikus állapotból induló Markov-láncot tekintünk, és vesszük azon időpontokat, amikor ez a Markov lánc az E_j pontot meglátogatja, akkor az egymást követő látogatási időpontok között eltelt időszakaszok hosszai olyan független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek teljesítik a felújítási tétel feltételeit $\mu = \mu_j$ várható értékkel. Ezen észrevétel segítségével megkapjuk a (7) formula bizonyítását.

Legyen $X_0, X_1, \dots,$ stacionáris Markov-lánc, $P(X_0 = E_j) = 1$, és legyen E_j a Markov-lánc egy rekurrens állapota. Legyen

$$\tau_1 = \tau_1(E_j) = \min\{k\colon k > 0,\ X_k = E_j\}. \tag{8}$$

Definiáljuk ezután a τ_n, $n = 1, 2, \dots,$ megállási szabályokat az n szám szerinti teljes indukcióval a következő módon. Ha τ_n-et már definiáltuk, akkor legyen

$$\tau_{n+1} = \tau_{n+1}(E_j) = \min\{k\colon k > \tau_n,\ X_k = E_j\}. \tag{9}$$

Szavakkal megfogalmazva, τ_n az E_j állapotba való n-ik visszatérés időpontja. Belátjuk a következő lemmát.

Lemma. *Tekintsünk egy $X_0, X_1, \dots,$ Markov-láncot. Ha E_j a Markov-lánc egy rekurrens állapota, és $P(X_0 = E_j) = 1$, akkor a (8) és (9) formulákban definiált τ_n, $n = 1, 2, \dots,$ megállási szabályokra az $Y_1 = \tau_1$, $Y_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots,$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Továbbá $P(Y_1 = N) = f_j(N)$, $N = 1, 2, \dots,$ ahol $f_j(N)$ a (1) képletben van definiálva.*

A Lemma bizonyítása. A $P(Y_1 = N) = f_j(N)$, $N = 1, 2, \dots,$ reláció nyílván teljesül, és elég megmutatni tetszőleges $k \ge 1$, és $N_j \ge 1$, $1 \le j \le k+1$ egész számokra, hogy

$$P(Y_{k+1} = N_{k+1} | Y_1 = N_1, \dots, Y_k = N_k) = f_j(N_k).$$

Ez ugyanis azt jelenti, hogy Y_{k+1} feltételes eloszlása feltéve az Y_j, $1 \le j \le k$ valószínűségi változók tetszőleges értékeit mindig megegyezik Y_1 eloszlásával. Ez pedig azt jelenti, hogy Y_{k+1} független az $(Y_1, \dots, Y_k)$ vektortól, és eloszlása megegyzik Y_1 eloszlásával.

A kívánt azonosság igazolásához elég megmutatni, hogy minden olyan E_{j_1}, $E_{j_2}, \dots$ $E_{j_{N_1 + \cdots + N_k}}$ sorozatra, amelyre

$$\begin{aligned} &\{\omega\colon\ X_0(\omega) = E_j, X_1(\omega) = E_{j_1}, X_2(\omega) = E_{j_2}, \dots X_{N_1 + \cdots + N_k}(\omega) = E_{j_{N_1 + \cdots + N_k}}\} \\ &\qquad \subset \{\omega\colon\ Y_1(\omega) = N_1, \dots, Y_k(\omega) = N_k\} \end{aligned}$$

$$P(Y_{k+1}=N_{k+1}|X_0=E_j,X_1=E_{j_1},X_2=E_{j_2},\dots X_{N_1+\cdots+N_k}=E_{j_{N_1+\cdots+N_k}})=f_j(N_k).$$

Viszont ebben az esetben $E_{j_{N_1+\cdots+N_k}}=E_j$, és a Markov tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}&P(Y_{k+1}=N_{k+1}|X_0=E_j,X_1=E_{j_1},X_2=E_{j_2},\dots X_{N_1+\cdots+N_k}=E_{j_{N_1+\cdots+N_k}})\\ &\qquad =P(Y_{k+1}=N_{k+1}|X_{N_1+\cdots+N_k}=E_j)=f_j(N_{k+1}).\end{aligned}$$

Az utolsó képlet második azonossága azért igaz, mert annak feltételes valószínűségét kell kiszámolni, hogy az E_j pontból kiinduló Markov lánc N_{k+1} idő múlva tér vissza először az E_j pontba. A lemmát bebizonyítottuk.

A Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló tétel egyszerű következménye a fenti lemmának és a felújítási tételnek. Valóban, tekintsük a lemma második állításában szereplő τ_n megállási szabályokat. Ezek felírhatóak $\tau_n=\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ alakban, ahol $Y_1,Y_2,\dots$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, és az az esemény, hogy az E_j pontból induló bolyongás az n-ik időpontban visszatér az E_j állapotba azzal az eseménnyel egyezik meg, hogy az $\tau_1(\omega),\tau_2(\omega),\dots,$ visszatérési idők valamelyike felveszi az n értéket. Mivel ezeket a valószínűségi változókat előállítottuk, mint független, egyforma eloszlású $Y_1,Y_2,\dots$ valószínűségi változók részletösszegeit, azt kell meggondolnunk, hogy ezekre alkalmazható a felújítási tétel, és az az általunk megfogalmazott eredményt adja.

Valóban, megadtuk az Y_1 valószínűségi változó eloszlását, és abból látszik, hogy Y_1 várható értéke a (2) formulában definiált μ_j szám. Másrészt azon pozitív egész számok halmazának, amelyeket az Y_1 valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel, (azaz a $\mathcal{A}$ halmazban szereplő számoknak) a legnagyobb közös osztója 1 az E_j állapot aperiódikus tulajdonsága miatt. Valóban, ha ezen számok mindegyike osztható volna valamely $d\ge 2$ számmal, akkor a τ_n valószínűségi változók értékei 1 valószínűséggel oszthatók lennének d-vel minden $n=1,2,\dots$ számra, és ez azt jelentené, hogy az E_j állapot periódusa osztható d-vel. Így a felújítási tétel megadja a kívánt állítást.

Az előbb tárgyalt eredmény bizonyításában azt bizonyítottuk, illetve használtuk fel, hogy (diszkrét idejű) Markov láncok teljesítik az úgynevezett erős Markov tulajdonságot. Ez egyszerű, de fontos tulajdonság, amelyet érdemes ismertetni. E tulajdonság definiciójának megadásához be kell vezetni a megállási szabály fogalmát.

A megállási szabály szemléletes tartalma az, hogy ez olyan utasítás (véletlen időpontbeli) megállásra, amely végrehajtható, azaz az n időpontbeli információk alapján, de a jövőbeli fejlődést nem feltétlenül ismerve el lehet dönteni, hogy az n-ik időpontban megállítsuk-e a folyamatot vagy sem. Először az általános esetben fogalmazom meg a definiciót, akkor amikor az n időpontig szerzett információk egy $\mathcal{F}_n$ σ-algebrában vannak összegyüjtve.

Megállási szabály definiciója. *Legyen adva σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3\subset\cdots\subset\mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy pozitív egész értékeket (és esetleg a ∞) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e σ-algebrák rendszerére nézve, ha $\{\omega\colon\tau(\omega)=n\}\in\mathcal{F}_n$ minden $n=1,2,\dots$ számra.*

Ezután megadom a definició változatát abban az esetben, ha σ-algebrák helyett valószínűségi változók egy sorozata van adva.

Megállási szabály definiciója. *Legyen valószínűségi változók $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Egy pozitív egész értékeket (és esetleg a ∞) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e valószínűségi változók sorozatára nézve, ha megállási szabály a $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_k(\omega), 1 \le k \le n)$ σ-algebrák növekvő rendszerére nézve.*

Feladat: Mutassuk meg, hogy a megállási szabály definicióját ekvivalens módon fogalmazzuk át, ha az $\{\omega\colon \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ feltételt az $\{\omega\colon \tau(\omega) \le n\} \in \mathcal{F}_n$ feltétellel helyettesítjük (minden $n = 1, 2, \dots$ számra).

E fogalom bevezetése után megfogalmazom az erős Markov tulajdonságot.

Erős Markov tulajdonság definiciója diszkrét idejű Markov-láncokra. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ (stacionárius) Markov-lánc. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc teljesíti az erős Markov tulajdonságot, ha a Markov-lánc tetszőleges olyan τ megállási szabályára, amelyre $P(\tau(\omega) < \infty) = 1$*

$$\begin{aligned}P(X_{\tau+1} = E_{u_1}, X_{\tau+2} = E_{u_2}, \dots, X_{\tau+j} = E_{u_j} | X_0 = E_{v_0}, \dots, X_\tau = E_{v_\tau})\\ = P(X_1 = E_{u_1}, X_2 = E_{u_2}, \dots, X_j = E_{u_j} | X_0 = E_{v_\tau})\end{aligned}$$

minden olyan n, $u_1, \dots, u_n$ és $v_1, \dots v_k$ számokra, amelyekre a fenti képlet baloldalán szereplő feltétel nem nulla valószínűségű esemény.

A Markov tulajdonság (stacionárius) Markov-láncokra azt mondja ki, hogy rögzítve egy n időpontot, és egy trajektóriát a $[0, n]$ intervallumon egy Markov-folyamatnak az n időpont utáni viselkedése, feltéve, hogy a $[0, n]$ időintervallumban az előírt trajektóriát járta be ugyanolyan, mint egy olyan Markov-folyamaté, amely a 0 időpontban ennek a trajektóriának a végpontjából indul. Az erős Markov tulajdonság ezt a tulajdonságot fogalmazza meg abban az általánosabb esetben, amikor a Markov-folyamatnak nem egy determinisztikus, hanem egy véletlen megállási szabály által definiált időpontja utáni viselkedését kívánjuk leírni. Bár ezt a fogalmat csak diszkrét idejű Markov-láncokra fogalmaztuk meg, az erős Markov tulajdonság fogalmát lehet (sőt érdemes) definiálni általános Markov-folyamatokra is.

Bevezetem a következő definiciókat.

Markov-lánc null rekurrens állapotának a definiciója. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc egy $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc egy E_j állapota null rekurrens állapot, ha az E_j állapotból indított Markov-lánc egy valószínűséggel visszatér az E_j állapotba, de a visszatérés idejének a várható értéke végtelen.*

Markov-lánc pozitív rekurrens állapotának a definiciója. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc egy $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc egy E_j állapota pozitív rekurrens állapot, ha az E_j állapotból indított Markov-lánc egy* *valószínűséggel visszatér az E_j állapotba, és a visszatérés idejének a várható értéke véges. Egy pozitív rekurrens aperiódikus állapotot ergodikusnak nevezünk.*

A következő tételben megfogalmazott eredmény részben összefoglaló jellegű. Ebben felsorolom azokat a már bizonyított eredményeket is, amelyek a $P(n,j,k)$ átmenetvalószínűségek segítségével jellemzik a tranziens, null rekurrens és pozitív rekurrens állapotokat. Ezenkívül nagy n idő esetén, aszimptotikus formulát is adunk a $P(n,i,j)$ átmenetvalószínűségekre, azaz annak a valószínűségére, hogy az E_j állapotba jutunk az (attól esetleg különböző) E_i állapotból. Ahhoz, hogy ezeket az eredményeket megkapjuk, először bevezetek néhány jelölést, és megadok néhány egyszerű, de hasznos formulát.

Vezessük be az

$$f_{i,j}(n) = P(X_n = E_j, X_m \neq E_j, \text{ ha } 1 \le m < n | X_0 = E_i), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

és

$$F(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}(n) \quad n = 1, 2, \dots, \tag{10'}$$

mennyiségeket. Az $f_{i,j}(n)$ szám annak a valószínűsége, hogy az E_i állapotból elinduló Markov-lánc az n időpontban jut először az E_j állapotba, és $F_{i,j}$ annak a valószínűsége, hogy az E_i állapotból elindított Markov-lánc valamikor később eljut az E_j állapotba.

Igaz a következő azonosság:

$$P(n,i,j) = \sum_{l=1}^{n} f_{i,j}(l) P(n-l,j,j), \quad \text{ha } n \ge 1, \tag{11}$$

mert $f_{i,j}(l)P(n-l,j,j)$ annak a valószínűsége, hogy az E_i állapotból kiinduló Markov-lánc az l-ik lépésben veszi fel először az E_j értéket, $1 \le l \le n$, és ezután $n-l$ lépésben az E_j állapotból visszajut az E_j állapotba. Most megfogalmazom a következő eredményt.

Tétel egy Markov-lánc egy állapotának jellemzéséről. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc valamely $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren $P(n,i,j) = P(X_n = E_j | X_0 = E_i)$ átmenetvalószínűségekkel.*

a) Az E_j állapot akkor és csak akkor tranziens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,j,j) < \infty.$$

Ebben az esetben

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,i,j) < \infty \quad \textit{minden } E_i \textit{ állapotra.}$$

b) Az E_j állapot akkor és csak akkor null rekurrens állapot, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,j,j)=\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} P(n,j,j)=0.$$

Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} P(n,i,j)=0 \quad \textit{minden } E_i \textit{ állapotra.}$$

c) Egy aperiódikus E_j állapot akkor és csak akkor ergodikus, (azaz akkor és csak akkor teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,j)=\frac{1}{\mu_j}>0$ reláció alkalmas $\mu_j>0$ számmal, ha $\mu_j=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nf_j(n)<\infty$, ahol az $f_j(n)$ mennyiség az (1) képlettel van megadva. A két képletben szereplő μ_j szám megegyezik. Ha az E_j állapot ergodikus, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(n,i,j)=F(i,j)\frac{1}{\mu_j} \quad \textit{minden } E_i \textit{ állapotra.} \tag{12}$$

Az ebben a képletben szereplő $F(i,j)$ számot a (10) és $(10')$ képletben definiáltuk.

Markov-lánc egy állapotának jellemzéséről szóló tétel bizonyítása. Az a) rész első állítását a Markov-láncok rekurrens és tranziens állapotainak jellemzéséről szóló tétel tartalmazza. Az a) rész második állítása következik az a) rész első állításából és a (11) formulából, mert ebből következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,i,j)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} f_{i,j}(l)P(n-l,j,j)=\left(\sum_{l=1}^{\infty} f_{i,j}(l)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} P(m,j,j)\right)<\infty.$$

A b) rész első állítása következik a Markov-láncok rekurrens és tranziens állapotainak és a Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló tételekből. Ez utóbbi eredmény csak aperiódikus (azaz 1 periódusú) állapotokról szól. Viszont, ha az X_j állapot periódusa $d\ge 2$, akkor tekinthetjük az $\bar X_j=X_{dj}$, $j=0,1,\dots$, $P(\bar X_j=0)=1$, Markov-láncot. Ennek periódusa 1, ezért erre alkalmazva a Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló eredményt kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_{nd}=E_j)=0$. Másrészt $P(X_{nd+r}=E_j)=0$, ha $0<r<d$. Ezért a b) rész első állítása igaz az általános esetben.

A b) rész második állítása következik annak első feléből és a (11) formulából, mert

$$P(n,i,j)\le \sup_{m\ge\frac{n}{2}} P(m,j,j)\sum_{l=1}^{n/2} f_{i,j}(l)+\sum_{l=n/2}^{\infty} f_{i,j}(l),$$

és a b) eset feltételei mellett mind a két összeg nagyon kicsi nagy n indexre.

A c) résznek is csak a második, a (12) formulában megfogalmazott állítása új. Az elsőt tartalmazza a Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló tétel. A hiányzó részt az első rész és a (11) formula segítségével láthatjuk be hasonlóan a b) rész indoklásához. Valóban

$$P(n,i,j) = \sum_{l=1}^{n/2} f_{i,j}(l)P(n-l,j,j) + \sum_{l=n/2+1}^{n} f_{i,j}(l)P(n-l,j,j) = \Sigma_1(n) + \Sigma_2(n).$$

Viszont

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_1(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n/2} \frac{f_{i,j}(l)}{\mu_j} = \frac{F(i,j)}{\mu_j},$$

és

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \Sigma_2(n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n/2}^{\infty} f_{i,j}(l) = 0,$$

ahonnan következik az állítás.

Feladat: Tekintsünk egy az origóból induló bolyongást a számegyenesen. Mutassuk meg, hogy a bolyongás egy valószínűséggel eljut az 1 pontba, viszont az 1 pontba jutás idejének a várható értéke végtelen.

Segítség: Alkalmazzuk az előző tétel eredményét.

Megadom egy Markov-lánc határátmenetvalószínűségeinek egy más tipusú jellemzését is. Ennek alapgondolata a következő. Ha megadjuk a Markov-lánc egy olyan kezdeti (úgynevezett stacionárius) eloszlását, amely az idő során nem változik, akkor bizhatunk abban, hogy ennek eloszlásai megegyeznek az előző tételben megadott határértékekkel. Íly módon ki tudjuk számolni az $\frac{1}{\mu_j}$ határértékeket anélkül, hogy a közvetlenül nehezen kiszámítható várható értékeket kellene meghatároznunk. Ehelyett egy (esetleg végtelen) lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. E módszer tárgyalásában szükségünk van az alábbi definicióra.

Markov-lánc stacionárius eloszlásának a definiciója. *Legyen $X_0, X_1, \dots,$ Markov-lánc valamely $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren $P(i,j) = P(X_1 = E_j | X_0 = E_i)$ egy lépéses átmenetvalószínűségekkel. Azt mondjuk, hogy egy $u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, \dots,$ nemnegatív számokból álló sorozat a Markov-lánc stacionárius eloszlását adja meg, ha ez a sorozat teljesíti a*

$$\sum_{j\colon E_j\in\mathcal{E}} u_j = 1 \tag{13}$$

$$u_j = \sum_{i\colon E_i\in\mathcal{E}} u_i P(i,j) \quad \textit{minden } j = 1,2,\dots \textit{ számra.} \tag{14}$$

egyenleteket.

A (13) és (14) formuláknak természetes szemléletes tartalma van. Ha olyan Markov-láncot tekintünk, amelynek 0 időpontbeli eloszlása $P(X_0 = E_j) = u_j$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra, akkor a (13) képlet alapján a Markov-lánc 1 időpontbeli eloszlása $P(X_1 = E_j) = \sum\limits_{i: E_i \in \mathcal{E}} P(X_0 = E_i) P(X_1 = E_j | X_0 = E_i) = \sum\limits_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i P(i,j) = u_j$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra. Ez azt jelenti, hogy a Markov-láncnak ugyanaz a $P(X_1 = E_j) = u_j$, $j = 1, 2, \dots,$ az eloszlása az $n = 1$ időpontban. De ekkor indukcióval kapjuk, hogy ugyanez a Markov-lánc eloszlása minden $n = 1, 2, \dots$ időpontban.

A korábbi eredmények alapján természetes azt várni, hogy bizonyos nem túl megszorító feltételek teljesülése esetén a Markov-láncnak egyetlen stacionárius eloszlása van, amelyet az $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ képlettel adhatunk meg. Azt várjuk, hogy ez a számsorozat kielégíti a (13) és (14) képleteket, valamint a Markov-lánc tetszőleges kezdeti eloszlás esetén tart a stacionárius eloszláshoz, ha az idő tart a végtelenhez. Ilyen tipusú eredményt fogunk bizonyítani.

Csak abban az esetben várhatjuk, hogy egy Markov-láncnak létezik az előbb leírt stacionárius eloszlása, ha annak állapotai pozitív rekurrens, aperiódikus állapotok. Ez a feltétel biztosítja, hogy az $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ számok pozitívak. Annak érdekében, hogy lássuk azt, hogy a később megfogalmazott eredmény jól használható, először áttekintjük egy Markov-lánc állapotterének szerkezetét. Megmutatjuk, hogy az állapotteret természetes módon fel lehet bontani alkalmas osztályok uniójaként úgy, hogy az egy osztályban levő állapotok egyszerre tranziens, null vagy pozitív rekurrens állapotok, és mindegyiküknek ugyanannyi a periódusa. Az állapottér alkalmas felbontásának megtalálásában a következő eredmény játszik kulcsfontosságú szerepet.

Tétel Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc valamely $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren $P(n,i,j) = P(X_n = j | X_0 = i)$ átmenet-valószínűségekkel. Legyen E_j rekurrens állapota a Markov-láncnak, és definiáljuk az állapottér következő az E_j állapottól függő $\mathcal{C}(j) \subset \mathcal{E}$ részhalmazát. $E_k \in \mathcal{C}(j)$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan r pozitív egész szám, hogy $P(r,j,k) > 0$, azaz az E_j állapotból pozitív valószínűséggel el lehet jutni az E_k állapotba.*

A $\mathcal{C}(j)$ halmaz minden eleme rekurrens állapot. Ha $E_k \in \mathcal{C}(j)$, $E_l \in \mathcal{C}(j)$ akkor $F(k,l) = 1$ a ($10'$) képletben definiált $F(\cdot,\cdot)$ mennyiséggel, azaz az E_k állapotból kiinduló Markov-lánc 1 valószínűséggel eléri az E_l állapotot. A $\mathcal{C}(j)$ halmazban levő állapotok mindegyike egyszerre null vagy pozitív rekurrens állapot, és mindegyikük periódusa megegyezik. Továbbá minden $E_k \in \mathcal{C}(j)$ (rekurrens) állapotra az E_k állapottól függő $\mathcal{C}(k) \subset \mathcal{E}$ halmazra $\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(j)$.

A Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól szóló tétel bizonyítása. Először azt mutatom meg, hogy ha $P(n,j,k) > 0$ valamely $n \ge 1$ számra, azaz a (rekurrens) E_j állapotból indított Markov-lánc pozitív valószínűséggel eljut az E_k állapotba, akkor $F(k,j) = 1$, azaz az E_k állapotból indított Markov-lánc 1 valószínűséggel eljut az E_j állapotba. Valóban, ha ez nem lenne igaz, akkor az $1 - F(k,j) > 0$ és $P(n,j,k) > 0$ relációk miatt pozitív lenne annak a valószínűsége, hogy az E_j állapotból induló Markov-lánc az n időpont után nem tér vissza az E_j állapotba, mert az n időpontban az E_k

állapotba jut, és onnan nem lép soha az E_j állapotba. Ez viszont ellentmond annak a ténynek, hogy az E_j állapot rekurrens, ezért a Markov-lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér az E_j állapotba.

Ha $k \in C(j)$, akkor léteznek olyan r és $\bar{r}$ számok, amelyekre $P(r,j,k) > 0$ és $P(\bar{r},k,j) > 0$. Továbbá $P(r+\bar{r}+n,k,k) \ge P(\bar{r},k,j)P(n,j,j)P(r,j,k)$. Ebből az egyenlőtlenségből, illetve abból a tényből, hogy a E_j állapot rekurrens tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n,j,j) = \infty$ következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n,k,k) = \infty$, és az E_k állapot szintén rekurrens. Továbbá, ha az E_j állapot vagy E_k állapot egyikéből egy E_l pozitív valószínűséggel elérhető, akkor ez az E_l állapot a E_j és E_k állapotok másikából is pozitív valószínűséggel elérhető, (esetleg először azt az állapotot látogatva meg, ahonnan tudjuk, hogy az E_l halmaz meglátogatható. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{C}(j) = \mathcal{C}(k)$, ha $E_k \in \mathcal{C}(j)$. Ez speciálisan azt a következményt is maga után vonja, hogy $E_k, E_l \in \mathcal{C}(j)$ esetén $F(k,l) = 1$. Valóban (a paraméterek más szereposztásában) láttuk, hogy ez a reláció következik abból, hogy $E_k \in \mathcal{C}(l)$.

Megmutatom, hogy abban az esetben, ha létezik egy olyan $E_k \in \mathcal{C}(j)$, amelyik null rekurrens állapot, akkor E_j is null rekurrens állapot. Innen következik, hogy $\mathcal{C}(j)$ osztályban levő állapotok egyidejűleg null vagy pozitív rekurrens állapot. Az említett tulajdonság azért érvényes, mert $P(r+\bar{r}+n,k,k) \ge P(\bar{r},k,j)P(n,j,j)P(r,j,k)$ alkalmas $P(\bar{r},k,j) > 0$ és $P(r,j,k) > 0$ számokkal, ezért a $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,k,k) = 0$ relációból következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,j,j) = 0$.

A tétel bizonyításának befejezéséhez elegendő azt megmutatni, hogy ha $E_k, E_l \in \mathcal{C}(j)$, és az $\mathcal{A}(k) = \{n\colon P(n,k,k) > 0\}$ halmaz elemei oszthatók egy d számmal, akkor az $A(l) = \{n\colon P(n,l,l) > 0\}$ halmaz elemei szintén oszthatók ezzel a d számmal. Innen következik, hogy a $\mathcal{C}(j)$ halmaz elemei ugyanolyan periódusú állapotok. A fent megfogalmazott állítás igazolása érdekében vegyük észre, hogy léteznek olyan $r_1 > 0$ és $r_2 > 0$, amelyekre $P(r_1,k,l) > 0$ és $P(r_2,l,k) > 0$. Továbbá $r_1 + r_2 \in \mathcal{A}(k)$, mert a Markov-lánc pozitív valószínűséggel visszajuthat $r_1 + r_2$ lépésben az E_k állapotból az E_k állapotba, r_1 lépésben az E_l majd további r_2 lépésben az E_k állapotba jutva. Ezért $r_1 + r_2$ osztható a d számmal. Továbbá, ha $n \in \mathcal{A}(l)$, azaz $P(n,l,l) > 0$ valamely n számra, akkor $P(n+r_1+r_2,k,k) \ge P(r_1,k,l)P(n,l,l)P(r_2,l,k) > 0$, ezért $n+r_1+r_2$ osztható a d számmal. A fentiekből következik, hogy n osztható d-vel, és ezt kellett belátnunk.

Bevezetem a következő két definiciót.

Zárt osztályok definiciója egy Markov-lánc állapotterében. *Legyen adva egy $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc valamely $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapotterén $P(j,k)$ 1 lépéses átmenetvalószínűségekkel. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ halmaz az állapottér egy zárt osztályát alkotja, ha minden $E_j \in \mathcal{C}$ állapotra $\sum\limits_{k\in\mathcal{C}} P(j,k) = 1$, azaz, ha a Markov-lánc egy $\mathcal{C}$ halmazbeli állapotból indul, akkor egy valószínűséggel a következő lépésben is egy ilyen állapotban marad.*

Irreducibilis, zárt osztályok definiciója egy Markov-lánc állapotterében. *Azt* *mondjuk, hogy egy Markov-lánc állapotterének egy zárt osztálya irreducibilis, ha önmagán és az üres halmazon kívül nincs más olyan részhalmaza, amely zárt osztály. Egy Markov-láncot irreducibilisnak hívunk, ha a teljes állapottér irreducibilis (zárt) osztály.*

Az előző eredményből kiolvasható, hogy ha E_j egy rekurrens állapot, akkor az E_j állapot az összes olyan állapottal együtt, amelyek az E_j állapotból induló Markov-láncban pozitív valószínűséggel elérhetőek zárt osztályt alkotnak. Sőt, ez egy irreducibilis zárt osztály. Ugyanis, ha $P(n,j,k) > 0$ valamely $n \ge 1$ számra, akkor létezik állapotoknak olyan $E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, Ej_n$, $j_0 = j$, $j_n = k$ sorozata, amelyre $P(1, j_{l-1}, j_l) > 0$ minden $1 \le l \le n$ számra. Ezért mindegyik E_{j_l}, $1 \le l \le n$, állapot, így speciálisan az E_k állapot is, benne van minden az E_j állapotot tartalmazó zárt osztályban.

A tranziens állapotok osztályozása nem ilyen egyszerűen áttekinthető. Az egyik lehetőségre a következő feladat mutat példát.

Feladat. *Legyen $X_1, X_2, \dots$ bolyongás a d-dimenziós téren. Ez irreducibilis Markov-lánc (azaz egyetlen irreducibilis osztályból áll), melynek elemei 2 periódikusak. Ha $d = 1$ vagy $d = 2$ akkor ennek az osztálynak az elemei null rekurrens állapotok, ha $d \ge 3$ akkor tranziens állapotok.*

Látni fogunk példát olyan Markov-láncokra is, amelynek tranziens állapotai nem tartoznak egyetlen zárt osztályba sem.

Bebizonyítom az előző tétel segítségével az irreduciblis zárt osztályok néhány tulajdonságát.

Tétel Markov-lánc irreducibilis zárt osztályainak tulajdonságairól. *Legyen $\mathcal{C}$ egy $X_0, X_1, \dots$, $P(n,j,k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$ átmenetvalószínűségekkel rendelkező Markov-lánc $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapotterének irreducibilis, zárt osztálya. Ekkor minden $E_k \in \mathcal{C}$ és $E_l \in \mathcal{C}$, állapotpárra az E_l állapot elérhető az E_k állapotból, azaz létezik olyan r pozitív egész szám, amelyre $P(r,k,l) > 0$. Egy irreducibilis osztály minden elemének ugyanaz a periódusa, és egy irreducibilis osztály minden eleme egyidejűleg, tranziens, null-rekurrens vagy pozitív rekurrens állapot. Ha E_j a Markov-lánc rekurrens állapota, akkor az előző tételben definiált $\mathcal{C}(j)$ halmaz, amely azokból az állapotokból áll, amelyeket az E_j állapotból pozitív valószínűséggel el lehet érni, irreducibilis, zárt osztály. Minden olyan zárt, irreducibilis osztály, amely tartalmaz egy E_j rekurrens állapotot megegyezik egy ilyen $\mathcal{C}(j)$ osztállyal.*

A tétel bizonyítása. Adva egy $\mathcal{C}$ zárt osztály és egy $E_k \in \mathcal{C}$ állapot definiáljuk azt a $\mathcal{C}^{(k)} \subset \mathcal{C}$ halmazt, amely azokból az $E_p \in \mathcal{C}$ állapotokból áll, amelyekre $P(n,k,p) > 0$ valamely n számra. Azt állítom, hogy $\mathcal{C}^{(k)}$ is zárt osztály. Innen következik a Tétel első állítása, mert ha a $\mathcal{C}$ halmaznak van olyan állapota, amely nem érhető el az E_k állapotból, azaz ha létezik olyan $E_l \in \mathcal{C}$ állapot, amelyre $P(n,k,l) = 0$ minden pozitív egész n számra, akkor $\mathcal{C}^{(k)}$ a $\mathcal{C}$ halmaz olyan nem üres, valódi részhalmaza, (mert $\mathcal{C}^{(k)}$ nem üres halmaz, az E_l állapotot viszont nem tartalmazza), amely zárt osztály. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben $\mathcal{C}$ nem irreducibilis.

Világos, hogy $\sum\limits_{l:E_l\in\mathcal{C}^{(k)}} P(n,k,l)=1$ minden $n=1,2,\dots$ számra, mert $\mathcal{E}\setminus\mathcal{C}^{(k)}$ csak olyan E_l állapotokat tartalmaz, amelyekre $P(n,k,l)=0$ minden $n=1,2,\dots$ számra. Azt állítom, hogy ha $E_l\in\mathcal{C}^{(k)}$, akkor a $\sum\limits_{p:E_p\in\mathcal{C}^{(k)}} P(n,l,p)=1$ relációnak is teljesülnie kell minden $n=1,2,\dots$ számra, amiből következik, hogy $\mathcal{C}^{(k)}$ zárt osztály. A bizonyítandó állítás igaz, mert ellenkező esetben lenne olyan $n\ge1$ szám, amelyre $\sum\limits_{p:E_p\in\mathcal{C}^{(k)}} P(n,l,p)<1$. Ekkor létezik olyan r szám, amelyre $P(r,k,l)>0$, és $\sum\limits_{\bar l:E_{\bar l}\in\mathcal{C}^{(k)}} P(n+r,k,\bar l)\le \sum\limits_{\bar l:E_{\bar l}\in\mathcal{E}\setminus\{E_l\}} P(r,k,\bar l)+P(r,k,l)\sum\limits_{p:E_p\in\mathcal{C}^{(k)}} P(n,l,p)=1-P(r,k,l)+P(r,k,l)\sum\limits_{p:E_p\in\mathcal{C}^{(k)}} P(n,l,p)<1$, és ez ellentmondás.

Az irreducibilis osztályok már bizonyított tulajdonságából következik az előző tétel bizonyításának befejezéséhez hasonlóan, hogy egy ilyen osztály minden elemének ugyanannyi a periódusa. Az előző tételben láttuk, hogy egy rekkurrens E_j állapotra a $\mathcal{C}(j)$ halmaz az állapottér egy zárt osztálya. Továbbá, ha $\bar{\mathcal{C}}\subset\mathcal{C}(j)$ nem üres zárt osztály, akkor létezik egy $E_k\in\bar{\mathcal{C}}$ elem, és ezért $\mathcal{C}(j)=\mathcal{C}(k)\subset\bar{\mathcal{C}}$. Ezért $\mathcal{C}(j)$ irreducibilis zárt osztály. Továbbá, ha egy irreducibilis zárt osztály tartalmaz egy rekurrens E_j állapotot, akkor tartalmazza a zárt $\mathcal{C}(j)$ osztályt is, ezért megegyezik vele. Innen következik, hogy egy irreducibilis zárt osztálynak vagy mindegyike eleme tranziens állapot vagy megegyezik valamelyik $\mathcal{C}(j)$ halmazzal, ahol E_j rekurrens állapot. Egy ilyen osztály minden eleme null rekurrens vagy pozitív rekurrens állapot. A tétel bizonyítását befejeztük.

Megfogalmazom a fenti eredmények alábbi következményét.

Következmény. *Legyen $X_0,X_1,\dots$ Markov-lánc $P(n,j,k)=P(X_n=E_k|X_0=E_j)$ átmenetvalószínűségekkel egy $\mathcal{E}=\{E_1,E_2\dots\}$ állapottéren. Bontsuk fel az $\mathcal{E}$ állapotteret az $\mathcal{E}=\mathcal{R}\cup\mathcal{T}$ képlettel az $\mathcal{R}$ rekurrens és $\mathcal{T}$ tranziens állapotokból álló halmazok uniójaként. A $\mathcal{R}$ halmaz felbontható $\mathcal{C}(j)$ diszjunkt, irreducibilis, zárt osztályok uniójaként. Ha $E_k,E_l\in\mathcal{C}(j)$ az $\mathcal{R}$ halmaz egy irreducibilis, zárt $\mathcal{C}(j)$ osztályára, akkor $F(k,l)=1$ a $(10')$ képletben definiált $F(\cdot,\cdot)$ függvénnyel.*

Bizonyítás. A megfogalmazott eredmények következnek a Markov-lánc irreducibilis zárt osztályainak és egy Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól szóló tételek eredményeiből. Azt kell még megmutatnunk, hogy ha két az utóbbi tétel megfogalmazásában definiált $\mathcal{C}(j)$ és $\mathcal{C}(k)$ halmaz nem diszjunkt, akkor $\mathcal{C}(j)=\mathcal{C}(k)$. De ebben az esetben létezik egy $E_l\in\mathcal{C}(j)\cap\mathcal{C}(k)$ állapot, és $\mathcal{C}(j)=\mathcal{C}(l)=\mathcal{C}(k)$.

A fent megfogalmazott követezményben egy Markov-lánc rekurrens állapotainak halmazát felbontottuk irreducibilis, zárt halmazok uniójaként. A tranziens állapotok halmazának nincs ilyen egyértelmű leírása. Ennek megmutatása érdekében a bolyongások állapotterének leírásáról szóló feladatot kiegészítem a következő példával.

Példa. *Definiáljuk a következő Markov-láncot a két-dimenziós tér egész koordinátájú rácspontjain: Ha a Markov-lánc valamely (j,k), $j\neq0$ pontban van, akkor a következő lépésben egyforma $\frac14$ valószínűséggel lép a $(j-1,k)$, $(j+1,k)$, $(j,k+1)$, $(j,k-1)$ szomszéd* *pontok valamelyikébe. Ha a Markov-lánc valamely $(0, k)$ alakú pontban van, akkor a következő lépésben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lép a $(0, k+1)$ vagy a $(0, k-1)$ pontba. Ennek a Markov-láncnak a $(0, k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ alakú pontok a rekurrens állapotai, amelyek irreducibilis zárt osztályt alkotnak. Ennek elemei null-rekurrens, 2 periódusú állapotok. A (j, k), $j \neq 0$ alakú pontok tranziensek. Egy ilyen állapotból kiinduló Markov-lánc 1 valószínűséggel eljut a rekurrens állapotokból álló halmazba, ezért nincs olyan irreducibilis zárt osztály, amely ezeket tartalmazza.*

Feladat: Bizonyítsuk be a fenti példa állítását.

Egy irreducibilis Markov-láncokról szóló állítást fogjuk bebizonyítani, azaz olyan Markov-láncot fogunk tekinteni, amelynek állapottere egyetlen, zárt osztály. Az ismertetett tétel feltételt ad arra, hogy mikor van egy ilyen Markov-láncnak stacionárius eloszlása.

Tétel irreducibilis Markov-láncok stacionárius eloszlásáról. *Legyen $X_0, X_1, \dots$ irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$ átmenetvalószínűségekkel egy $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ állapottéren.*

a) Ha a Markov-lánc állapotai pozitív rekurrensek, akkor az $u_j = \lim\limits_{n\to\infty} P(n, i, j) > 0$ határértékek léteznek, $u_j = \frac{1}{\mu_j}$, ahol a μ_j számok a (2) formulában vannak definiálva. Az u_j számok, $E_j \in \mathcal{E}$, a Markov-lánc stacionárius eloszlását definiálják, azaz teljesítik a (13) és (14) formulákat.

b) Megfordítva, ha a Markov-láncnak van u_j, $E_j \in \mathcal{E}$, stacionárius eloszlása, akkor a Markov-lánc ergodikus, azaz pozitív rekurrens állapotokkal rendelkezik, (és aperiódikus). A Markov-lánc (egyetlen) stacionárius eloszlása teljesíti az $u_j = \frac{1}{\mu_j}$, $E_j \in \mathcal{E}_j$, azonosságot.

A tétel bizonyítása. Tekintsük először azt az esetet, amikor az a) rész feltételei teljesülnek. Az egy Markov-lánc egy állapotának jellemzéséről szóló tételben bizonyított (12) formulából és a Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól szóló tételből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P(n, i, j) = F(i, j)\frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$. Azt kell még belátnunk, hogy az $u_j = \frac{1}{\mu_j}$, $E_j \in \mathcal{E}$, számok teljesítik a (13) és (14) azonosságot. Először azt mutatom meg, hogy

$$u_j = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k P(m, k, j) \quad \text{minden } m = 1, 2, \dots, \text{ számra.} \tag{15}$$

Ennek érdekében írjuk fel a

$$P(n+m, i, j) = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} P(n, i, k) P(m, k, j)$$

és próbáljunk $n \to \infty$ limeszt venni az azonosság mind a két oldalán, felhasználva azt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P(n+m, i, j) = u_j$ és $\lim\limits_{n\to\infty} P(n, i, k) = u_k$. Mivel a jobb oldalon szereplő

$P(m,k,j)$ együtthatók összege (rögzített j-re és a k változó szerint összegezve) lehet divergens is, egyelőre csak az alábbi a kívántnál gyengébb összefüggést tudjuk felírni (felhasználva, hogy a jobb-oldalon szereplő számok mind nem-negatívak):

$$u_j \ge \sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} u_k P(m,k,j) \tag{15a}$$

Hasonlóan a $\sum\limits_{k:E_k\in\mathcal{E}} P(n,i,k)=1$ azonosságból kapjuk $n\to\infty$ határátmenettel, hogy

$$s=\sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} u_k \le 1. \tag{16}$$

Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva, és összegezve a (15a) egyenlőtlenségeket a j változó szerint, azt kapjuk, hogy

$$s=\sum_{j:E_j\in\mathcal{E}} u_j \ge \sum_{j:E_j\in\mathcal{E}}\sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} u_k P(m,k,j) = \left(\sum_{j:E_j\in\mathcal{E}} P(m,k,j)\right)\left(\sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} u_k\right)=s.$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenségsor bal és jobb oldala egyenlő (és véges), a felhasznált (15a) egyenlőtlenségekben mindenütt azonosságnak kell állni, tehát a (15) formula érvényes.

Ha a (15) formulát $m=1$ választással tekintjük, megkapjuk a (14) képletet. Tekintsük újból a (15) formulát tetszőleges j számmal, és tartsunk végtelenhez az m paraméterrel. Ekkor felhasználva a (16) formulát (pontosabban csak azt, hogy az ott tekintett összeg véges) azt kapjuk, hogy

$$u_j=\sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} u_k u_j = u_j \sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} u_k.$$

Mivel $u_j=\frac{1}{\mu_j}>0$, innen következik a (13) reláció.

Rátérek a b) rész bízonyítására. Megmutatom n szerinti teljes indukcióval a Chapman–Kolmogorov egyenlet segítségével, hogy a b) esetben teljesül a (14) képlet következő általánosítása is.

$$u_j=\sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i P(n,i,j) \quad \text{minden } j=1,2,\dots \text{ és } n=1,2,\dots \text{ számra.} \tag{14$'$}$$

Valóban, ha a (14′) formula igaz az n számra, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i P(n+1,i,j) &= \sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i \sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} P(n,i,k)P(k,j)\\ &= \sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} P(k,j) \sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i P(n,i,k) = \sum_{k:E_k\in\mathcal{E}} P(k,j)u_k = u_j,\end{aligned}$$

tehát a (14′) azonosság igaz $n+1$-re is.

Alkalmazzunk $n\to\infty$ határátmenetet a (14′) képletben. Azt állítom, hogy a Markov-lánc ergodikus, minden i és j indexre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,i,j)=\frac{1}{\mu_j}>0$ (2) képletben definiált határérték, és

$$u_j=\sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i\frac{1}{\mu_j} \quad \text{minden } j=1,2,\dots \text{ számra.} \tag{17}$$

Valóban, mivel irreducibilis Markov-láncot tekintünk, a Markov-lánc minden állapota egyszerre tranziens, null-rekurrens vagy pozitív rekurrens. Viszont az első két esetben $\lim\limits_{n\to\infty} P(n,i,j)=0$, ezért a (14′) formulában elvégzett határátmenet azt adná, hogy $u_j=0$ minden j indexre. Ez viszont ellentmond a (13) relációnak. Ezért a Markov-lánc állapotai pozitív rekurensek. Mivel feltettük, hogy a Markov-lánc aperiódikus, ezért ergodikus, az átmenet valószínűségeknek az előző bekezdésben felírt határértékeik vannak, és teljesül a (17) formula. A (17) és (13) formulák alapján viszont

$$u_j=\sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i\frac{1}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j}\sum_{i:E_i\in\mathcal{E}} u_i=\frac{1}{\mu_j} \quad \text{minden } j=1,2,\dots \text{ számra.}$$

Ez azt jelenti, hogy egy ergodikus Markov-láncnak $u_j=\frac{1}{\mu_j}$, $E_j\in\mathcal{E}_j$, az egyetlen stacionárius eloszlása.

Feladat: Lássuk be az előző feladat eredményének a segítségével, hogy egy $X_0,X_1,\dots,$ irreducibilis, ergodikus Markov-lánc eloszlása tetszőleges kezdeti eloszlás esetén konvergál a Markov-lánc stacionárius eloszlásához, ha $n\to\infty$, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=E_j)=u_j$ minden u_j állapotra.

A korábbi eredményekben feltettem, hogy a tekintett Markov-lánc aperiódikus. Ezt elsősorban kényelmi szempontok miatt tettem. Periódikus Markov-láncok vizsgálata hasonlóan történhet, és az eredmények is hasonlóak, csak a jelölés válik kissé bonyolultabbá. Ezenkívül periódikus Markov-láncok vizsgálata visszavezethető az aperiódikus Markov-láncok esetére. Itt csak röviden áttekintem azt, hogy milyen eredmények érvényesek, és milyen észrevétel segítségével kaphatjuk meg azokat.

Legyen $X_0,X_1,\dots$ irreducibilis Markov-lánc egy $\mathcal{E}=\{E_1,E_2,\dots\}$ állapottéren $P(n,j,k)$ átmenetvalószínűséggel. Tegyük fel, hogy a Markov-lánc állapotai pozitív rekurrensek, és periódusaik egyenlőek valamilyen $d\ge 1$ számmal. (Tudjuk, hogy egy irreducibilis Markov-lánc minden állapota egyszerre, tranziens, null vagy pozitív rekurrens, és minden állapotnak ugyanaz a periódusa.) Tekintsük az $X_0,X_1,\dots$ Markov-lánc mellett az $\bar X_n=X_{dn}$, $n=0,1,2,\dots$ Markov-láncot is, amelynek állapottere megegyezik az eredeti Markov-lánc $\mathcal{E}$ állapotterével, és értéke az n időpontban egyenlő az eredeti Markov-lánc értékével az nd időpontban. Ez utóbbi Markov-lánc aperiódikus, $\bar P(j,k)=P(d,j,k)$ egy lépéses átmenetvalószínűségekkel, minden állapota pozitív rekurrens, de állapottere nem feltétlenül irreducibilis. Viszont alább megadom e Markov-lánc állapotterének a felbontását d darab $\mathcal{C}_0,\dots,\mathcal{C}_{d-1}$ irreducibilis osztály uniójara.

Rögzítsük mondjuk az $E_1 \in \mathcal{E}$ állapotot, és tekintsük minden $E_k \in \mathcal{E}$ állapotra az $\mathcal{N}_k = \{n\colon\ P(n,1,k) > 0\}$ halmazt, azaz azon időpontok halmazát, amely időpontok alatt az E_1 állapotból pozitív valószínűséggel jutunk az E_k állapotba. Nem nehéz belátni, hogy az $X_0, X_1, \dots$ Markov-lánc d periódusa miatt létezik olyan $0 \le p \le d-1$ szám, hogy $n = p \bmod d$ minden $n \in \mathcal{N}_k$ számra. Nevezzük ezt a p számot az E_k állapot $r(k)$ rangjának. Definiáljuk a $\mathcal{C}_p \subset \mathcal{E}$, $1 \le p \le d$, halmazokat úgy, hogy $E_k \in \mathcal{C}_p$ akkor és csak akkor, ha $r(k) = p$. Némi munkával be lehet látni, hogy a $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$ Markov-lánc $\mathcal{E}$ állapotterének felbontása irreducibilis zárt osztályokra a $\mathcal{C}_p$, $0 \le p \le d-1$, halmazokból áll. Továbbá, ha $E_k \in \mathcal{C}_p$, $E_l \in \mathcal{C}_q$ valamely p és q számokkal, akkor $P(n,k,l) > 0$ csak akkor lehetséges, ha $n = q - p \bmod d$. Ezenkívül, ha $E_k \in \mathcal{C}_p$, és $P(n,k,l) > 0$ valamely n időpontra, akkor $E_l \in \mathcal{C}_q$ azzal a q számmal, amelyre $n = q - p \bmod d$.

A fenti összefüggések segítségével, és használva a már bizonyított eredményeket az $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$ Markov-lánc $\mathcal{C}_p$, $1 \le p \le d-1$, irreducibilis, zárt osztályaira kapjuk, hogy a

$$du_j = \lim_{n\to\infty} P(dn + q - p, i, j) = \frac{d}{\mu_j} \quad \text{ha } E_i \in \mathcal{C}_p \quad \text{ és } E_j \in \mathcal{C}_q$$

határérték létezik. Itt a μ_j szám a (2) képletben van definiálva, és $P(dn+r,i,j) = 0$, ha $r \ne q - p \bmod p$. Továbbá az is igaz, hogy az $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ számok alkotják a Markov-lánc (egyetlen) stacionárius eloszlását. A részletek bizonyítását elhagyom.

Rátérek véges állapotterű, azaz véges sok különböző értéket felvevő Markov-láncok rövid tárgyalására. Véges állapotterű Markov-láncok rendelkeznek néhány extra tulajdonsággal, amelyeket a következő tételben fogalmazok meg. Ezenkívül a sztochaszikus mátrixok néhány lineáris algebrai tulajdonsága segít véges állapotterű Markov-láncok vizsgálatában.

Tétel véges állapotterű Markov-láncok tulajdonságairól. *Egy véges állapotterű Markov-láncnak mindig van pozitív rekurrens állapota, viszont nincs null rekurrens állapota. Egy tranziens állapotból elindított Markov-lánc 1 valószínűséggel bekerül a Markov-lánc rekurrens állapotaiból álló halmazba.*

A tétel bizonyítása. Mivel egy véges Markov-lánc n lépéses átmenetvalószínűségeit is egy sztochasztikus mátrix adja meg, amelynek mérete nem függ az n számtól, és egy sztochasztikus mátrix sorösszege 1, ezért, rögzítve a sztochasztikus mátrix i-edik sorát valamely i számmal, létezik olyan j index és pozitív egész számok n_k sorozata, amelyekre $\limsup\limits_{n_k\to\infty} P(n_k,i,j) > 0$. Viszont egy ilyen j indexhez tartozó E_j állapot pozitív rekurrens, mert sem tranziens, sem null rekurrens nem lehet. Mivel a Markov-lánc rekurrens állapotaiból álló halmaz felbontható diszjunkt irreducibilis zárt osztályok uniójára, és egy irreducibilis zárt osztály elemei egyidejűleg pozitív vagy null rekurrens állapotok, ezért tekintve a Markov-lánc megszorítását egy irreducibilis zárt osztályra az előző érvelés alapján kapjuk, hogy a Markov-láncnak nincs null rekurrens állapota. Végül, ha egy tranziens E_i állapotból elindított Markov-lánc pozitív valószínűséggel elkerülné a Markov-lánc rekurrens állapotaiból álló halmazt, akkor (újból a Markov-lánc véges állapottere miatt) létezne a Markov-láncnak olyan E_j tranziens állapota, amelyre $\limsup\limits_{n_k\to\infty} P(n_k,i,j) > 0$ alkalmas n_k számorozattal, és ez ellentmondás.

Egy Markov-lánc viselkedéséről nagyon hasznos információt ad az a Markov-lánc átmenetvalószínűségeit megadó sztochasztikus mátrix spektrumának, azaz sajátértékeinek és sajátvektorainak az ismerete. Vegyük észre, hogy egy sztochasztikus mátrixnak, ha jobbról szorozzuk meg oszlopvektorokkal, akkor a csupa 1 koordinátából álló vektor sajátvektor 1 sajátértékkel. Továbbá 1-nél nagyobb sajátértékkel rendelkező (oszlop) sajátvektor nem lehetséges. Azt is tudjuk a lineáris algebrából, hogy egy mátrixot akár balról szorozzuk meg egy sorvektorral, akár jobbról egy oszlopvektorral, ugyanazok lesznek a sajátértékei. (A sajátvektorai lényegesen különbözhetnek.)

Feladat. Lássuk be, hogy egy sztochasztikus mátrixnak nem lehet 1-nél nagyobb sajátértékkel rendelkező (oszlop) sajátvektora.
Segítség: Mutassuk meg, hogy az eredeti vektor legnagyobb abszolut értékű koordinátájának az abszolut értéke nagyobb vagy egyenlő, mint a képvektor bármely koordinátájának az abszolut értéke.

Tudjuk tehát, hogy egy sztochasztikus mátrixnak létezik egy 1 sajátértékkel rendelkező (sor) sajátvektora. Enyhe plusz feltevések mellett azt is lehet tudni, hogy ennek összes koordinátája pozitív, és szép esetekben az is igaz, hogy a sztochasztikus mátrix összes többi sajátértéke szigorúan kisebb, mint 1. Ilyen esetben a sztochasztikus mátrix n-ik hatványának viselkedéséről nagyon értékes információt nyerhetünk. Ugyanis felírva a mátrix által meghatározott lineáris transzformációt olyan koordinátarendszerben, ahol annak a lehető legegyszerűbb az alakja (ez a Jordan féle normálalak használatát jelenti) be lehet látni, hogy a következő aszimptotikus reláció érvényes. Tekintsünk egy tetszőleges nem negatív értékű koordinátákból álló sorvektort, amelyben a koordináták összege 1. Ha alkalmazzuk erre a vektorra az átmenetvalószínűségek által meghatározott sztochasztikus mátrix n-ik hatványát, akkor olyan vektort kapunk, amely e mátrix 1 sajátértékű sajátvektorától az (n változó függvényében) exponenciálisan kis különbséggel tér el. Ez azt jelenti, hogy a mátrix sajátvektora adja meg a Markov-lánc stacionárius eloszlását, és ha a Markov-láncot tetszőleges kezdeti eloszlással indítjuk el, akkor a Markov-lánc eloszlása az n idő függvényében exponenciális sebességgel konvergál a stacionárius eloszláshoz.

Az előbb vázolt gondolatmenet azt mutatja, hogy hasznos olyan eredményeket bizonyítani, amelyek megmondják, hogy egy sztochasztikus mátrixnak mikor van egyetlen 1 sajátértékű sajátvektora. A Markov-láncok elméletében Perron egy tétele, illetve annak Frobenius által bizonyított általánosítása hasznos. Ezek az eredmények olyan mátrixokkal foglalkoznak, amelyeknek összes együtthatója nem negatív. Perron tételét fogom kimondani, és röviden jelzem, hogy milyen általánosítását adta ennek az eredménynek Frobenius.

Perron tétele. *Legyen egy A $n \times n$ méretű négyzetes mátrix minden eleme* szigorúan *pozitív szám. Az A mátrix* $\det(A - \lambda I)$ *karakterisztikus polinomjának, (ahol I az $n \times n$-es diagonális egységmátrix) legnagyobb abszolut értékű gyöke szigorúan pozitív, egyszeres gyök, és a karakterisztikus polinom összes többi gyökének az abszolut értéke szigorúan kisebb, mint ez a sajátérték. Az A mátrixnak a karakterisztikus polinom legnagyobb sajátértékéhez tartozó egyszeres sajátvektorának mindegyik koordinátája szigorúan pozi-*

tív szám. Ha az A mátrix sztochasztikus mátrix, azaz minden sorösszege 1-gyel egyenlő, akkor karakterisztikus polinomjának a legnagyobb gyöke 1.

Perron tétele alkalmazható olyan véges állapotterű Markov-lánc vizsgálatában, amelynek összes egy-lépéses átmenetvalószínűségei szigorúan pozitívak. Számunkra a következő eredmény érdekes.

A Perron tétel egy következménye Markov láncok viselkedéséről. *Teljesítse egy $E_1, \dots, E_m$ állapotokat tartalmazó Markov lánc Π átmenetvalószínűség mátrixa a Perron tétel feltételeit. Ekkor a Markov lánc irreducibilis, és $q_j = P(X_0 = E_j)$, $1 \le j \le m$, stacionárius eloszlása megegyezik a Π mátrix azon 1 sajátértékű $q = (q_1, \dots, q_m)$ sajátvektorával, amelyre $\sum\limits_{k=1}^{m} q_k = 1$. A Markov lánc tetszőleges 0 időpontbeli eloszlása esetén a Markov lánc n időpontbeli eloszlása (az n változó szerint) exponenciális sebességgel tart a q eloszláshoz, amikor $n \to \infty$.*

A következmény bizonyítása. Mivel a tekintett Markov lánc bármely állapotából a Markov lánc bármely más állapotába pozitív valószínűséggel el lehet jutni (1 lépésben), a Markov lánc irreducibilis. A Markov lánc stacionárius eloszlása megegyezik a Perron tétel állítása szerint létező q vektorral. A következmény állításának igazolásához azt kell még megmutatni, hogy tetszőleges $p = (p_1, \dots, p_m)$, $p_j \ge 0$, $1 \le j \le k$, $\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$ alakú vektorra $\lim\limits_{n\to\infty} p\Pi^n = q$, és a konvergencia exponenciális sebességű ebben a relációban.

Tekintsük a Π mátrix J Jordan-féle normálalakját, és azt az $e^{(1)}, \dots, e^{(m)}$ bázist, amelyben a Π mátrix ezt a Jordan féle normálakot veszi fel. Ekkor $e^{(1)} = q$, a mátrix 1 sajátértékű sajátvektora, egy 1×1 méretű Jordan kalickában van, és a Jordan-féle normálalakban szereplő összes többi sajátérték szigorúan kisebb, mint 1. Ezért, ha a Markov lánc $p = (p_1, \dots, p_m)$ eloszlásvektorát felírjuk $p = c_1 q + \sum\limits_{j=2}^{m} c_j e^{(j)}$ alakban, akkor a Markov lánc n időpontbeli $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}) = p\Pi^n$ eloszlására a $p^{(n)} = c_1 q + \sum\limits_{j=2}^{m} c(j,n) e^{(j)}$ reláció teljesül alkalmas exponenciálisan kicsi $c(j,n)$ együtthatókkal, azaz létezik olyan $0 < \lambda < 1$ szám, amelyre érvényes a $\lim\limits_{n\to\infty} c(j,n)\lambda^{-n} = 0$ reláció minden $2 \le j \le m$ számra. Azt kell még észrevenni, hogy a $p = c_1 q + \sum\limits_{j=2}^{m} c_j e^{(j)}$ relációban $c_1 = 1$, mert $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{m} p_j^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(c_1 \sum\limits_{j=1}^{n} q_j + \sum\limits_{j=2}^{m} c(j,n) \sum\limits_{s=1}^{m} e_s^{(j)} \right) = c_1$, ahol $e^{(j)} = (e_1^{(j)}, \dots, e_m^{(j)})$, $2 \le j \le m$.

A Perron tételben tekintett mátrixok irreducibilis és 1 periódusú Markov-láncok vizsgálatában használhatóak. Algebrai módon jellemezhetőek az irreducibilis Markov-láncok átmenetvalószínűségei által meghatározott sztochasztikus mátrixok általánosan is. Be lehet vezetni a nem-negatív elemű, úgynevezett irreducibilis mátrixok fogalmát az általános esetben, amely az irreducibilis Markov-láncok által meghatározott sztochasztikus mátrixok természetes általánosítása. A Perron tétel Frobenius által bizonyított általánosítása irreducibilis, nem-negatív elemű mátrixok legnagyobb abszolut értékű sajátértékeinek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok jellemzését adja meg. Ennek megfogalmazása, amelyet ebben az ismertetésben elhagyok, bonyolultabb, mint az eredeti Perron tételé. Ez a bonyolultság azzal függ össze, hogy Frobenius eredménye nemcsak az aperiódikus, hanem az irreducibils, periódikus Markov-láncok viselkedését is leírja.

Kiegészítés.

A felújítási tétel bizonyítása.

Legyenek $Y_1, Y_2 \dots$ független, egyforma eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$, $n = 1, 2, \dots$, és definiáljuk a következő mennyiségeket: $f_k = P(Y_1 = k)$, $k = 1, 2, \dots$, $\mu = EY_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k f_k$, $B(\omega) = \{S_1(\omega), S_2(\omega) \dots\}$, $u_n = P(\{\omega\colon\, n \in B(\omega)\})$, $n = 1, 2, \dots$, és $u_0 = 1$. Vegyük észre, hogy teljesülnek a

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1, \quad \text{és} \quad f_k \ge 0 \quad \text{minden } k = 1, 2, \dots \text{ számra,} \tag{A1}$$

valamint az

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \cdots f_n u_0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{A2}$$

relációk. Az (A1) formula azt fejezi ki, hogy az Y_1 valószínűségi változó értéke 1 valószínűséggel egy pozitív egész szám. Az (A2) formula azért igaz, mert $f_j u_{n-j}$ annak a valószínűsége, hogy $Y_1 = j$, és $Y_2 + \cdots Y_l = n - j$ valamilyen $l \ge 2$ számra, ha $1 \le j < n$, és $f_n u_0$ annak a valószínűsége, hogy $Y_1 = n$. (Vegyük észre, hogy mivel az Y_j valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, ezért $u_m = P(\{\omega\colon Y_2(\omega) + \cdots Y_l(\omega) = m$ valamely $l = 2, 3, \dots,$ számra$\}$.) Továbbá a felújítási tétel feltételei szerint az $\mathcal{A} = \{j\colon\, f_j > 0\}$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Ezért a felújítási tétel következik az alább megfogalmazott és később bebizonyítandó eredményből.

Tétel A. *Legyenek $f_1, f_2, \dots$ pozitív egész számok, amelyek teljesíti az (A1) relációt, és amelyekre az $\mathcal{A} = \{j\colon\, f_j > 0\}$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Legyen $u_0 = 1$, és definiáljuk az u_n, $n = 1, 2, \dots,$ számokat rekurzíve az (A2) formula segítségével. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\mu}, \quad \textit{ahol } \mu = \sum_{k=1}^{\infty} f_k. \tag{A3}$$

A $\mu = \infty$ esetben az (A3) formula a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ azonosságot adja.

A Tétel A állítását a következő Propozició segítségével fogjuk bebizonyítani.

Propozició. *Teljesüljenek a Tétel A feltételei. Vezessük be a Tétel A jelöléseit használva az* $\eta = \limsup_{n\to\infty} u_n$ *mennyiséget. Ekkor létezik olyan* $n_1 < n_2 < \dots$ *számsorozat, amelyre igaz, hogy*

$$\lim_{j\to\infty} u_{n_j+k} = \eta = \limsup_{n\to\infty} u_n \quad \textit{minden } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \textit{ számra.} \tag{A4}$$

Először megmutatom, hogy hogyan következik a Tétel A a Propozició állításából.

Vezessük be a $\rho_k = f_{k+1} + f_{k+2} + \cdots$, $k = 0, 1, 2, \dots$, mennyiségeket. Ekkor az (A1) képlet szerint $\rho_0 = 1$, és a μ mennyiséget $\mu = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho_k$ alakban írhatjuk. Valóban,

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} k(\rho_{k-1} - \rho_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k.$$

Továbbá az (A2) formulából következik az alábbi azonosság.

$$\rho_0 u_N + \rho_1 u_{N-1} + \cdots + \rho_N u_0 = 1 \quad \text{minden } N = 0, 1, 2, \dots \text{ számra.} \tag{A5}$$

Valóban az (A2) formulát összegezve $1 \le n \le N$-re kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_1 + \cdots + u_N &= u_{N-1} f_1 + u_{N-2}(f_1 + f_2) + \cdots + u_0(f_1 + \cdots + f_N) \\ &= u_{N-1}(\rho_0 - \rho_1) + u_{N-2}(\rho_0 - \rho_2) + \cdots + u_0(\rho_0 - \rho_N) \\ &= \rho_0(u_{N-1} + \cdots + u_0) - (\rho_1 u_{N-1} + \rho_2 u_{N-2} + \cdots + \rho_N u_0). \end{aligned}$$

Innen, mivel $\rho_0 = 1$ és $u_0 = 1$

$$\begin{aligned} u_N &= u_0 - (\rho_1 u_{N-1} + \rho_2 u_{N-2} + \cdots + \rho_N u_0) \\ &= u_N + 1 - (\rho_0 u_N + \rho_1 u_{N-1} + \rho_2 u_{N-2} + \cdots + \rho_N u_0), \end{aligned}$$

ahonnan következik az (A5) azonosság.

Megjegyzés: Definiáljuk $P(Y_j = k) = f_k$, $j = 1, 2, \dots$, eloszlású független, egyforma eloszlású $Y_1, Y_2, \dots$ valószínűségi változók $S_p = \sum\limits_{j=1}^{p} Y_j$, $p = 1, 2, \dots$ részletösszegeinek a sorozatát. Ekkor az u_n szám annak a valószínűsége, hogy e részletösszeg sorozat valamelyik tagja felveszi az n értéket. Az (A5) azonosság azt a tényt fejezi ki, hogy e részletösszeg sorozat minden $N = 0, 1, 2, \dots$ számra 1 valószínűséggel felvesz egy az N számnál nagyobb értéket. Ugyanis az $u_k \rho_{N-k}$, $0 \le k \le N$, szám annak a valószínűsége, hogy az $S_0, S_1, \dots$ sorozat meglátogatja a k-pontot, majd ezután egy az N számnál nagyobb értéket vesz fel.

Bizonyítsuk be a Tétel A állítását (a Propozició segítségével) először a $\mu = \infty$ esetben. Alkalmazzuk az (A5) formulát olyan $N = n_j$ indexekre, amelyek teljesítik a

Propozíció állítását, azaz $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j-k} = \eta = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$ minden $k > 0$ számra, és hajtsuk végre a $j \to \infty$ határátmenetet. Ekkor az (A5) formulából, illetve a $\mu = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$ azonosságból következik, hogy $\eta = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Viszont mivel $u_n \ge 0$ minden $n \ge 0$ indexre, innen adódik a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ reláció ebben az esetben.

A $\mu < \infty$ esetben mutassuk meg először azt, hogy $\eta = \frac{1}{\mu}$. Az (A2) formulából látható, hogy $0 \le u_n \le 1$ minden n indexre. Alkalmazzuk az (A5) formulát az $N = n_j$ számokkal, ahol az n_j számok a Propozícióban szereplő indexeket jelölik, és tartsunk a j index-szel végtelenhez. Nem nehéz belátni, felhasználva a $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j-k}\rho_k = \rho_k\eta$ relációt minden fix k indexre, hogy a $\mu = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty$ esetben a $j \to \infty$ határátmenet az (A5) formulában az

$$\eta(\rho_0 + \rho_1 + \cdots) = 1$$

azonossághoz vezet, ahonnan $\eta = \frac{1}{\mu}$.

A Tétel A bizonyításának befejezéséhez elég azt megmutatni, hogy akárhogy rögzítünk egy $\varepsilon > 0$ számot nem lehet a pozitív egész számok olyan n_j részsorozatát találni, amelyre $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j} = \eta_0$ valamely $0 \le \eta_0 \le \eta - \varepsilon$ számmal. Valóban, ha lenne ilyen sorozat, akkor felhasználva azt, hogy $0 \le u_n \le \eta + \frac{\varepsilon}{2\mu}$ $n \ge n_0$ esetében alkalmas n_0 küszöbindex-szel, és $0 \le u_n \le 1$ minden n-re az (A5) formula baloldalán szereplő kifejezést a következő módon becsülhetnénk felülről $N = n_j$ indexre elég nagy j számra.

$$\begin{aligned}
&\rho_0 u_N + \rho_1 u_{N-1} + \cdots + \rho_N u_0 \\
&\quad \le \left(\eta_0 + \frac{\varepsilon}{2\mu}\right)\rho_0 + (\rho_1 + \cdots + \rho_K)\left(\eta + \frac{\varepsilon}{2\mu}\right) + \sum_{j=K+1}^{\infty} \rho_j \\
&\quad \le (\eta_0 - \eta) + \eta\sum_{l=0}^{K} \rho_l + \frac{\varepsilon}{2\mu}\sum_{l=0}^{K} \rho_l + \frac{\varepsilon}{4} \le -\varepsilon + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \le 1 - \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

ha először a K, majd attól függően a j indexet választjuk elég nagyra. A számolásban kihasználjuk az $\eta\mu = 1$ és $\mu = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \rho_l$ azonosságokat. A kapott egyenlőtlenség ellentmond az (A5) relációnak. Ezért a kívánt tulajdonságú η_0 nem létezik, hanem teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \eta = \frac{1}{\mu}$ azonosság.

A bizonyítás befejezéséhez be kell még bizonyítani a Propozíciót. Ennek érdekében válasszuk ki a pozitív egész számok egy olyan n_j részsorozatát, amelyre létezik minden $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ számra a $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j+k} = w_k$ határérték, továbbá $w_0 = \eta = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$.

Ilyen részsorozat létezik. Valóban, mivel az u_n sorozat korlátos, ezért ki lehet választani pozitív egész számok egy olyan $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \dots$ részsorozatát, amelyre teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n_j^{(0)}} = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \eta$ reláció. Ezután szukcesszíve ki lehet választani a természetes számok egymásba skatulyázott $n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots$, részsorozatait minden $l = 1, 2, \dots$ számra úgy, hogy teljesüljön a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n_j^{(l)}+k} = w_k$ reláció minden $|k| \le l$ egész számra valamely w_k határértékkel. Ezután a szokásos átlós eljárással megkaphatjuk a kívánt tulajdonságú u_{n_j} sorozatot. Azt állítom, hogy az így kapott sorozat teljesíti a Propozicióban előírt tulajdonságokat. Azt kell belátni, hogy a Propozició feltételeinek teljesülése esetén $w_k = \eta$ minden $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ számra.

Az eddig bizonyított állításokból csak az következik, hogy $0 \le w_k \le \eta$ minden $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ számra, és $w_0 = \eta$. Ahhoz, hogy a még bizonyítandó állítást igazoljuk, először megmutatom, hogy teljesül a

$$w_k = \sum_{l=1}^{\infty} f_l w_{k-l} \tag{A6}$$

azonosság minden $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ számra. Valóban, definiáljuk a

$$V_k^{(j)} = \begin{cases} u_{n_j+k}, & \text{ha } n_j + k \ge 0 \\ 0, & \text{ha } n_j + k < 0 \end{cases}$$

számokat minden $j = 1, 2, \dots$ és $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ indexre. Ekkor az (A2) formula alapján

$$V_k^{(j)} = \sum_{l=1}^{\infty} f_l V_{k-l}^{(j)},$$

és innen $j \to \infty$ határátmenettel megkapjuk az (A6) formulát.

Megfogalmazom a következő Lemmmát.

Lemma. *Legyen w_k, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, valós számok olyan sorozata, amely teljesíti az (A6) relációt valamely az (A1) formulát kielégítő f_k sorozattal. Legyen továbbá $0 \le w_k \le \eta$ minden $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ indexre, $w_0 = \eta$, és legyen az $\mathcal{A} = \{j\colon f_j > 0\}$ halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Ekkor $w_k = \eta$ minden $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ indexre.*

A Propozició az (A6) reláció és a Lemma következménye. Ezért elegendő a Lemmát belátni.

A lemma bizonyítása. Mivel az f_k sorozat teljesíti az (A1) relációt, és $0 \le w_k \le w_0 = \eta$ minden k indexre, az (A6) formula adja $k = 0$ választással, hogy $w_{-k} = \eta$ minden $k \in \mathcal{A}$ indexre. Ezután az (A6) relációt $k, -k \in \mathcal{A}$, alakú számokra alkalmazva kapjuk, hogy $w_{-(k_1+k_2)} = \eta$, ha $k_1, k_2 \in \mathcal{A}$. Folytatva ezt az eljárást azt kapjuk, hogy minden $k = \alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_s k_s$ alakú lineáris kombinációra, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ pozitív egész számok, és $k_1, \dots, k_s \in \mathcal{A}$ igaz a $w_{-k} = \eta$ reláció.

Másrészt azt állítom, hogy mivel a $\mathcal{A}$ halmazban levő számok legnagyobb közös osztója 1, létezik olyan k_0 küszöbindex, hogy minden $k \ge k_0$ szám felírható a fenti alakú $k = \alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_s k_s$ lineáris kombinációként. Valóban, alapvető számelméleti eredmények alapján léteznek olyan $a_1, \dots, a_j \in \mathcal{A}$ számok, és $\beta_1, \dots, \beta_j$ egész, (nem feltétlenül pozitív) együtthatók, amelyekre teljesül a $\sum\limits_{s=1}^{j} \beta_s a_s = 1$ reláció. Legyen $A = a_1 + \dots + a_j$, és írjunk minden k pozitív egész számot $k = tA + p$, $0 \le p < A$, alakban. Ekkor a $k = t(a_1 + \dots + a_j) + p \sum\limits_{s=1}^{j} \beta_s a_s$ azonosság megadja minden elég nagy szám kívánt alakú előállítását.

A fentiekből következik, hogy létezik olyan k_0 küszöbindex, hogy $w_k = \eta$, ha $k \le -k_0$. Viszont ha $w_l = \eta$ minden $l \le k$ számra valamely k számra, akkor az (A1) és (A6) formula (a $k + 1$ indexre alkalmazva) azt adja, hogy $w_{k+1} = \eta$. Ezen észrevétel alapján teljes indukcióval kapjuk, hogy $w_k = \eta$ minden k indexre. A lemmát bebizonyítottuk.