

Wiener-folyamatok definíciója. A funkcionális centrális határeloszlástétel.

A valószínűségszámítás egyik nagyon fontos fogalma a Wiener-folyamat, amelyet Brown-mozgásnak is hívnak. Az első elnevezés e fogalom első matematikailag precíz bevezetőjére, Norbert Wienerre, a második pedig egy Brown nevű XIX. században élt angol biológusra utal, aki egy folyadékban levő, egymással ütköző apró részecskék mozgását tanulmányozta. Később kiderült, hogy a Wiener-folyamat az egy részecske (véletlen) pályáját leíró legjobb matematikai modell. Korábbi tanulmányainkban láttuk, hogy a valószínűségi változók körében a normális eloszlás, a vektor értékű valószínűségi változók között a több-dimenziós normális eloszlás központi szerepet játszik. A Wiener-folyamat hasonlóan fontos szerepet játszik a sztochasztikus folyamatok elméletében, és tulajdonképpen úgy tekinthető, mint a standard normális eloszlású valószínűségi változók megfelelője a sztochasztikus folyamatok között. Ennek a meglehetősen nagyvonalú kijelentésnek pontosabb értelmet ad a később ismertetett funkcionális centrális határeloszlástétel. A továbbiakban felhasználok a korábban tárgyalt sztochasztikus folyamatokról szóló alapvető fogalmakat és eredményeket.

A Wiener-folyamat definíciójának megadása előtt vezessük be a következő egyszerű definíciót (elnevezést).

Sztochasztikus folyamat trajektóriájának a fogalma. *Legyen adva egy T indexhalmazzal paraméterezett $\xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat. Ennek egy rögzített ω elemi eseményhez tartozó trajektóriáján a T halmazon definiált $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, függvényt értjük.*

Bevezetjük továbbá a következő fogalmat is.

Gauss (sztochasztikus) folyamat definíciója. *Egy ξ_t , $t \in T$, folyamatot Gauss-folyamatnak nevezünk, ha ennek minden véges dimenziós eloszlása normális eloszlású, azaz T halmaz minden $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\}$ véges részhalmazára a $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ véletlen vektor több-dimenziós normális eloszlású vektor.*

1. feladat: Idézzük fel a több-dimenziós normális eloszlás definícióját. Lássuk be, hogy egy n -dimenziós (X_1, \dots, X_n) normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározzák az EX_j , $1 \leq j \leq n$ várható értékek és a $\text{Cov}(X_j, X_k) = EX_j X_k - EX_j EX_k$, $1 \leq j, k \leq n$, kovarianciák.

Megfogalmazom a Wiener-folyamat definícióját.

Wiener-folyamat definíciója. *Egy a $[0, T]$ $0 < T \leq \infty$, intervallumon értelmezett Wiener-folyamatot olyan Gauss-folyamatot értünk, amelyre*

- a) $EW(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, $EW(s)W(t) = \min(s, t)$, $0 \leq s, t \leq T$.*
- b) A $W(t, \omega)$ folyamat trajektóriája minden ω elemi eseményre folytonos függvény a $[0, T]$ intervallumon.*

A Wiener-folyamat definíciója kapcsán számos kérdést tisztázni kell. A fő kérdés az, hogy a fent megadott definíció értelmes-e. Először tisztázni kell az a) pontot.

Mondhatjuk-e, hogy definiáltuk a Wiener-folyamat véges dimenziós eloszlásait konzisztens módon? A definíció b) pontja még rejtélyesebb. A Kolmogorov-féle alaptételben semmilyen kijelentés nem szerepelt a sztochasztikus folyamat trajektóriáját illetően. Honnan tudjuk, hogy létezik folytonos trajektóriájú, a Wiener-folyamat a) feltételét teljesítő Gauss-folyamat? Ha létezik, akkor mit mondhatunk a folytonos trajektória létezéséről? Automatikusan teljesül-e ez a követelmény, vagy tennünk kell-e valamit ennek teljesítése érdekében?

Az első kérdés megválaszolása egyszerűbb. Egyrészt az előbb megfogalmazott 1. feladat egyik állítása szerint a várható érték és a kovariancia megadásával és azzal a megkötéssel, hogy a Wiener-folyamat Gauss-folyamat, egyértelműen megadtuk e folyamat véges dimenziós eloszlásait. Másrészt igaz az alábbi 2. feladat állítása:

2. feladat. Rögzítsünk valamely $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ számokat, vegyünk független, nulla várható értékű és $t_j - t_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, $t_0 = 0$, normális eloszlású η_j valószínűségi változókat, és definiáljuk a $Z_k = \sum_{j=1}^k \eta_j$, $1 \leq k \leq n$ valószínűségi változókat. Lássuk be, hogy a (Z_1, \dots, Z_n) véletlen vektor eloszlása megegyezik a Wiener-folyamatban definiált $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ véletlen vektor eloszlásával. Lássuk be ennek az észrevételnek a segítségével, hogy a Wiener-folyamat definíciójában előírt véges dimenziós eloszlások értelmesek, azaz valóban léteznek a kívánt kovarianciával rendelkező véges dimenziós normális eloszlások, és ezek az eloszlások konzisztensek.

A 2. feladat állítása azt jelenti, hogy a Kolmogorov-féle alaptétel szerint létezik a Wiener-folyamat definíciójában szereplő a) tulajdonságot teljesítő Gauss-folyamat. A b) tulajdonsággal kapcsolatban a helyzet bonyolultabb. Oldjuk meg először a következő feladatot.

3. feladat: Legyen adva egy ξ_t , $0 \leq t \leq 1$, a $[0, 1]$ intervallummal mint index halmazzal indexelt sztochasztikus folyamat valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Jelölje \mathcal{F} a ξ_t , $0 \leq t \leq 1$, valószínűségi változók által generált σ -algebrát. Lássuk be, hogy az az esemény, hogy a ξ_t folyamat folytonos trajektóriájú nincs benne az \mathcal{F} σ -algebrában.

A 3. feladat eredménye azért érdekes a számunkra, mert csak az ott definiált σ -algebra eseményeinek a valószínűségéről tudunk beszélni. Ha alaposabban meggondoljuk be lehet látni, hogy egy sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásainak ismeretében nem beszélhetünk annak az eseménynek a valószínűségéről, hogy a sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos függvény. Viszont lehetőségünk van arra, hogy ha adva van egy sztochasztikus folyamat, akkor megpróbáljuk annak trajektóriáit „kijavítani” úgy, hogy a sztochasztikus folyamatot definiáló valószínűségi változókat egy null-mértékű halmazon megváltoztatunk. Ezáltal a sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait nem változtatjuk meg, viszont bizonyos esetekben esélyünk van arra, hogy egy sztochasztikus folyamatban kontinuum sok null-mértékű halmazon változtatva a trajektóriák tulajdonságait megváltoztatva jobb tulajdonságú trajektóriákat kapunk. Az alábbiakban megfogalmazok és bebizonyítok egy eredményt, amely elégséges feltételt ad arra, hogy egy sztochasztikus folyamat valószínűségi változóit null-mértékű halmazon megváltoztatva olyan sztochasztikus folyamatot kapjunk, amelynek trajektóriái

folytonosak. (Természetesen az új folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az eredeti folyamat véges dimenziós eloszlásaival.) Azután megmutatom, hogy ez az eredmény alkalmazható a Wiener-folyamatok esetében is. Ez lehetővé teszi, hogy a Wiener-folyamat definíciójában megköveteljük a b) tulajdonságot.

Az eredmény megfogalmazása előtt bevezetem a következő definíciót.

Sztochasztikus folyamat sztochasztikus folytonosságának a definíciója. *Legyen adva egy $X(t)$, $a \leq t \leq b$, sztochasztikus folyamat valamely $[a, b]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy ez a sztochasztikus folyamat folytonos valamely $a \leq t \leq b$ pontban, ha minden $t_n \rightarrow t$ számsorozatra az $X(t_n)$ valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak az $X(t)$ valószínűségi változóhoz, azaz ha minden $\varepsilon > 0$ számra és $t_n \rightarrow t$ számsorozatra teljesül a*

$$\lim_{t_n \rightarrow t} P(|X(t_n, \omega) - X(t, \omega)| > \varepsilon) = 0$$

reláció.

Most megfogalmazom a következő Lemmát.

Lemma sztochasztikus folyamat folytonos trajektóriáiról. *Legyen adva egy $X(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, sztochasztikus folyamat a $[0, 1]$ intervallumon. Teljesítse ez a sztochasztikus folyamat a következő két tulajdonságot.*

- a) *Az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat sztochasztikusan folytonos a $[0, 1]$ intervallum minden pontjában.*
- b) *A sztochasztikus folyamat majdnem minden $X(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, $\omega \in \Omega$, trajektóriája rendelkezik a következő tulajdonsággal. Az $X\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq k \leq 2^n$ függvény, azaz az $X(\cdot, \omega)$ függvény megszorítása a diadikusan racionális pontokra, egyenletesen folytonos.*

Ekkor létezik olyan $\bar{X}(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, sztochasztikus folyamat, amelynek minden $\bar{X}(\cdot, \omega)$ trajektóriája folytonos függvény, és $P(\bar{X}(t, \omega) = X(t, \omega)) = 1$ minden $0 \leq t \leq 1$ pontban.

Megjegyzés: Belátható, hogy a Lemmában szereplő a) és b) feltétel teljesülése vagy nem teljesülése az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásaitól függ.

A Lemma bizonyítása. Definiáljuk az $\bar{X}(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatot a következő módon: Legyen $\bar{X}(t, \omega) = 0$ minden $0 \leq t \leq 1$ számra egy olyan ω esetében, amelyre az $X\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)$ függvény nem egyenletesen folytonos. Az olyan ω elemi eseményekre viszont, amelyekre ez a függvény egyenletesen folytonos a diadikusan racionális pontokban tekintsünk minden $0 \leq t \leq 1$ számra egy olyan $\frac{k_n}{2^n} = \frac{k_n(t)}{2^n}$ sorozatot, $n = 1, 2, \dots$, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2^n} = t$, és legyen $\bar{X}(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X\left(\frac{k_n}{2^n}, \omega\right)$. Ez a limesz létezik, mert az $X\left(\frac{k_n}{2^n}, \omega\right)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat Cauchy sorozat. Az $X(t, \omega)$ és $\bar{X}(t, \omega)$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel megegyezik, mert mind a kettőhöz sztochasztikusan (a mértékelmélet

nyelvén mértékben) konvergál az $X\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat. Ezenkívül az $\bar{X}(\cdot, \omega)$ trajektóriák folytonos függvények minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre.

Az előző lemma segítségével bebizonyítom az alábbi állítást, amely a korábbi eredményekkel együtt biztosítja, hogy létezik Wiener-folyamat.

Tétel (folytonos trajektóriájú) Wiener-folyamat létezéséről. *Legyen adva egy olyan $\bar{W}(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, Gauss-folyamat a $[0, 1]$ intervallumon, amely teljesíti a Wiener-folyamat definíciójában szereplő a) feltételt. Ekkor létezik olyan $W(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, Wiener-folyamat a $[0, 1]$ intervallumon, amelyre $P(W(t, \omega) = \bar{W}(t, \omega)) = 1$ minden $0 \leq t \leq 1$ számra, és trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak.*

A Wiener-folyamat létezéséről szóló tétel bizonyítása. Elég megmutatni, hogy mindkét a Lemmában szereplő feltétel teljesül egy olyan $\bar{W}(t, \omega)$ Gauss-folyamatra, amely teljesíti a Wiener-folyamat definíciójában szereplő a) feltételt. Ezek közül az a) tulajdonság teljesülése nyilvánvaló a Csebisev egyenlőtlenség alapján, mert $\bar{W}(t_n, \omega) - \bar{W}(t, \omega)$ 0 várható értékű és $|t - t_n|$ szórásnégyzetű valószínűségi változó. A b) tulajdonság bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \bar{W}\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n}, \omega\right) \right| > 2^{-n/8}\right) < \infty. \quad (\text{A})$$

Ebből ugyanis a Borel-Cantelli lemma alapján következik, hogy létezik olyan $\bar{\Omega} \subset \Omega$, $P(\bar{\Omega}) = 1$ esemény, amelyre igaz, hogy minden $\omega \in \bar{\Omega}$ elemi eseményre van olyan $n(\omega)$ küszöbindex úgy, hogy $\sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \bar{W}\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n}, \omega\right) \right| \leq 2^{-n/8}$ minden $n \geq n(\omega)$ számra. Azt állítom, hogy ebből következik, hogy ha t és s két olyan diadikus racionális szám, amelyre $0 < t - s < 2^{-L}$ valamely (nagy) L egész számra, $\omega \in \bar{\Omega}$, $L \geq n(\omega)$ akkor $|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq 2 \sum_{n=L}^{\infty} \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \bar{W}\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n}, \omega\right) \right| \leq \sum_{n=L}^{\infty} 2^{-n/8} \leq 1000 \cdot 2^{-L/8}$, ahonnan következik, hogy a $\bar{W}(t, \omega)$ folyamat teljesíti a b) tulajdonságot, ha $\omega \in \bar{\Omega}$.

A fenti egyenlőtlenségsorozat első egyenlőtlenségének belátása érdekében tekintsük a leghosszabb $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$ intervallumokat, amelyekre $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right] \subset [s, t]$. Egy vagy két ilyen intervallum van, és $j \geq L$. Legyen ezen intervallumok egyesítésének a bal végpontja $\frac{k}{2^j}$, jobb végpontja pedig $\frac{\bar{k}}{2^j}$, $\bar{k} = k + 1$ vagy $\bar{k} = k + 2$. Mind az $\left[s, \frac{k}{2^j}\right]$ mind a $\left[\frac{\bar{k}}{2^j}, t\right]$ intervallum előállítható különböző hosszúságú $2^{-j'}$, $j' \geq j+1$, hosszúságú diadikus intervallumok egyesítéseként. Az előbbiekből következik, hogy az $[s, t]$ intervallum előáll 2^{-j} , $j \geq L$, hosszúságú diadikus intervallumok egyesítéseként, és ebben az egyesítésben minden $j \geq L$ -re legfeljebb 2 darab 2^{-j} hosszúságú intervallum szerepel. Innen következik a kívánt egyenlőtlenség.

Az (A) reláció bizonyításához vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \bar{W}\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n}, \omega\right) \right| > 2^{-n/8}\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} P \left(\left| \bar{W} \left(\frac{k}{2^n}, \omega \right) - \bar{W} \left(\frac{k-1}{2^n}, \omega \right) \right| > 2^{-n/8} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{E \left(\bar{W} \left(\frac{k}{2^n}, \omega \right) - \bar{W} \left(\frac{k-1}{2^n}, \omega \right) \right)^4}{2^{-n/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{3 \cdot 2^{-2n}}{2^{-n/2}} < \infty, \end{aligned}$$

mert a $W \left(\frac{k}{2^n}, \omega \right) - \bar{W} \left(\frac{k-1}{2^n}, \omega \right)$ valószínűségi változók normális eloszlásúak, nulla várható értékkel és 2^{-n} szórásnégyzettel. Ezért a negyedik momentumuk $3 \cdot 2^{-2n}$. A tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés: A fenti tételben beláttuk, hogy létezik a $[0, 1]$ intervallumon definiált Wiener-folyamat. A jelölések némi változtatásával be lehet látni ugyanezzel a módszerrel, hogy tetszőleges $T > 0$ számra létezik Wiener-folyamat a $[0, T]$ intervallumon. De be lehet látni azt, hogy létezik $W(t, \omega)$, $t \geq 0$. Wiener-folyamat a pozitív félegyenesen például a következő feladat megoldásának a segítségével.

Feladat: Legyen $W_n(t, \omega)$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq t \leq 1$, független Wiener-folyamatok sorozata a $[0, 1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy „ezeket a független Wiener-folyamatokat összeragasztva”, azaz definiálva a $W(t, \omega) = \sum_{j=1}^{[t]} W_j(1, \omega) + W_{[t]+1}(\{t\}, \omega)$, $0 \leq t < \infty$, Wiener-folyamat a $t \geq 0$ félegyenesen, ahol $[t]$ a t szám egész részét $\{t\}$ pedig a t szám tört részét jelöli.

Nem kötelező feladat: Mutassuk meg, (felhasználva az előző bizonyítás gondolatait, hogy ha egy $X(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, sztochasztikus folyamat a $[0, 1]$ intervallumon teljesíti az $E|X(t, \omega) - X(s, \omega)|^{2+\alpha} \leq C|t - s|^{1+\beta}$ feltételt alkalmas $\alpha > 0$, $\beta > 0$ és $C > 0$ konstansokkal mindent $0 \leq s < t \leq 1$ számpárra, akkor létezik az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatnak olyan $\bar{X}(t, \omega)$ módosítása, amelyre $P(X(t, \omega) = \bar{X}(t, \omega)) = 1$ minden $0 \leq t \leq 1$ számra, és a $\bar{X}(t, \omega)$ folyamat minden trajektóriája folytonos függvény. (Valójában az $\alpha > 0$ feltétel elhagyható a feltételként szereplő egyenlőtlenségből. Azért tettük ezt fel, mert a legtöbb érdekes esetben csak $\alpha > 0$ számmal tudjuk biztosítani a kívánt feltétel teljesülését.)

4. feladat: Mutassuk meg, hogy egy a $[0, 1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat tekinthető, mint egy $C([0, 1])$ -tér értékű, azaz a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos értékű függvényekből álló, és a szuprémum normával ellátott Banach téren értelmezett valószínűségi változó. A probléma jobb megértése érdekében a megfogalmazom e kérdés 4a) változatát, amely megmagyarázza, mi a probléma lényege.

4a. feladat: Világos, hogy egy a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos trajektóriájú $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőt leképezi a $C([0, 1])$ térbe. De be kell látni, hogy ez a leképezés mérhető. Tudjuk, hogy mivel minden rögzített $0 \leq t \leq 1$ számra az $X(t, \cdot)$ függvény folytonos, azaz tetszőleges Borel mérhető B halmazra $\{\omega : X(t, \omega) \in B\} \in \mathcal{A}$, (azaz a B halmaz ösképe mérhető). Lássuk be, hogy a $C([0, 1])$ tér tetszőleges mérhető D halmazára $\{\omega : X(t, \omega) \in D\} \in \mathcal{A}$.

4b. feladat: Az 4. feladat állítása szerint tetszőleges a $[0, 1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú folyamat tekinthető úgy, mint egy értékeit a $C([0, 1])$ térben felvevő valószínűségi változó. Lássuk be, hogy e folyamat véges dimenziós eloszlásai meghatározzák annak valószínűségét is, hogy véve egy tetszőleges Borel-mérhető halmazt a $C([0, 1])$ térben, a sztochasztikus folyamat trajektóriái ebbe a halmazba esnek.

5. feladat: Az előző tétel megoldásában fontos szerepet játszott az a lépés, hogy adjunk jó becslést annak valószínűségére, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó egy adott számnál nagyobb értéket vesz fel. Ezt a becslést abban a bizonyításban a negyedik momentum becslésének a segítségével kaptuk. Az ebben a feladatban megfogalmazott becslés pontosabb, és bizonyos nehezebb feladatokban erre van szükség. A következő jelölést fogjuk alkalmazni. $\Phi(x)$ jelöli a standard normális eloszlásfüggvényt, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, ennek sűrűségfüggvényét. Mutassuk meg (parciális integrálással), hogy minden $x > 0$ számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x).$$

Wiener-folyamatok tulajdonságai.

Megfogalmazom azt a fontos eredményt, amelyet funkcionális centrális határeloszlástételnek szokás nevezni, és amely a szokásos centrális határeloszlástétel természetes és fontos általánosítása. Először felidézem a centrális határeloszlástétel általános alakját.

Ez a tétel arról szól, hogy ha tekintjük valószínűségi változóknak egy szériasorozatát, azaz minden egyes $k = 1, 2, \dots$ egész számra megadjuk valószínűségi változók $\xi_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, sorozatát, amelyek (rögzített k számra) függetlenek, akkor a $S_k = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a normális eloszláshoz nagyon általános feltételek mellett. E feltételek közül a legfontosabb az úgynevezett Lindeberg feltétel, amelyet külön felidézek.

Lindeberg feltétel definíciója szériasorozatokra: Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq n_k$, és $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$. Ez a szériasorozat akkor és csak akkor teljesíti a Lindeberg feltételt, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(\{|\xi_{k,j}| > \varepsilon\}) = 0,$$

ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátor függvénye.

Centrális határeloszlástétel szériasorozatokra a Lindeberg feltétel teljesülése esetén. Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j} = 0$,

$E\xi_{k,j}^2 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq n_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, és teljesítse e szériasorozat a Lindeberg feltételt. Ekkor

a.) a szériasorozat tagjai teljesítik a $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{1 \leq j \leq n_k} E\xi_{k,j}^2 \right) = 0$ kicsiségi feltételt.

b.) Az $S_k = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$, $1 \leq k < \infty$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard, azaz nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha $k \rightarrow \infty$.

Be lehet látni azt is, hogy a centrális eloszlástétel ezen formája bizonyos értelemben éles, és tovább nem javítható. Ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.

Viszont megfogalmazok egy olyan eredményt, amely azt fejezi ki, hogy amennyiben veszünk egy a Lindeberg feltételt teljesítő szériasorozatot, és rögzített k számra nemcsak az $S_k = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ véletlen összeget vezetjük be, hanem az összes

$$S_k(j) = \sum_{p=1}^j \xi_{k,p}, \quad 1 \leq j \leq n_k \quad (\text{B1})$$

részletösszeget, és tekintjük az $S_k(j)$, $1 \leq j \leq n_k$, sorozat eloszlását, akkor ennek aszimptotikus viselkedése bizonyos értelemben jól leírható egy Wiener-folyamat segítségével.

A fenti állítás pontos megfogalmazásának érdekében vezessük be a következő jelöléseket: Legyen adva egy

$$\begin{array}{c} \xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,n_1} \\ \vdots \\ \xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k} \\ \vdots \end{array} \quad (\text{B2})$$

szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$, $\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = s_k^2$, és feltesszük, hogy teljesül

a $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k^2 = 1$ reláció. Vezessük be az $S_k(0) = 0$, $S_k(j) = \sum_{p=1}^j \xi_{k,p}$ és $s_k(j)^2 = \sum_{p=1}^j \sigma_p^2$,

$\bar{s}_k(0) = 0$, $\bar{s}_k(j)^2 = \frac{s_k(j)^2}{s_k^2}$, $1 \leq j \leq n_k$, $k = 1, 2, \dots$, mennyiségeket. Adjuk meg ezen mennyiségek segítségével a következő a $[0, 1]$ intervallumon definiált $X_k(t) = X_k(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, (véletlen) folytonos függvényeket:

$$X_k(\bar{s}_k^2(j), \omega) = S_k(j), \quad 0 \leq j \leq n_k \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned} X_k(t, \omega) &= \frac{\bar{s}_k(j)^2 - t}{\bar{s}_k(j)^2 - \bar{s}_k(j-1)^2} X_k(\bar{s}_k^2(j-1), \omega) + \frac{t - \bar{s}_k(j-1)^2}{\bar{s}_k(j)^2 - \bar{s}_k(j-1)^2} X_k(\bar{s}_k^2(j), \omega) \\ &\quad \text{ha } \bar{s}_k(j-1)^2 \leq t \leq \bar{s}_k(j)^2, \quad 1 \leq j \leq n_k, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

azaz az $X_k(\cdot, \omega)$ függvény az $\bar{s}_k(j)^2$ pontokban megegyeznek az első j $\xi_{k,p}(\omega)$ valószínűségi változó összegével, a köztük levő pontokban pedig lineáris függvényként kiegészítjük őket. (Vegyük észre, hogy az $\bar{s}_k(j)^2 = \frac{s_k(j)^2}{s_k^2}$ szám közelítőleg egyenlő az $S_k(j)$ valószínűségi változó szórásnégyzetével, mert $s_k(j)^2 = \text{Var } S_k(j)$, és $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k^2 = 1$. Ez a tény teszi természetessé az $X_k(\cdot)$ sztochasztikus folyamat skálázását.) Tegyük fel, hogy a (B2) szériaszorozat teljesíti a Lindeberg feltételt is. Ekkor alkalmazható rá a centrális határeloszlástétel. Némi plusz munkával be lehet látni, hogy nemcsak az $X_k(1, \omega)$ valószínűségi változók konvergálnak eloszlásban a standard normális eloszláshoz, ha $k \rightarrow \infty$, hanem az is igaz, hogy minden rögzített t számra az $X_k(t, \omega)$ valószínűségi változók konvergálnak eloszlásban egy 0 várható értékű és t szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változóhoz. Sőt, az is igaz, hogy minden $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ számokra az $(X_k(t_1, \omega), \dots, X_k(t_m, \omega))$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak egy olyan (Z_1, \dots, Z_m) m -dimenziós normális eloszlású vektor eloszlásához, amelyre $EZ_j = 0$, $0 \leq j \leq k$, $EZ_j Z_{j'} = \min(t_j, t_{j'})$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy nagy k indexre a (B3) képletben definiált $X_k(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat közel van eloszlásban egy a $[0, 1]$ intervallumon definiált Wiener-folyamathoz. Az alábbiakban megfogalmazok egy tételt, amely a fent megfogalmazottakhoz hasonló, de tartalmasabb állítást fogalmaz meg. A tétel kimondása előtt emlékeztetek arra, hogy mint azt a 4. feladatban megfogalmazott állítás megfogalmazza, egy a $[0, 1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatot tekinthetünk egy $C([0, 1])$ téren definiált valószínűségi változónak is. Ezt az észrevételt alkalmazhatjuk mind a Wiener-folyamatra, mind a (B3) képletben definiált folyamatokra. Az a tény, hogy egy Wiener-folyamat felfogható úgy, mint egy értékeit a $C([0, 1])$ térben felvevő valószínűségi változó lehetővé teszi, hogy bevezessük az alább megadandó Wiener-mérték fogalmát.

Wiener-mérték definíciója. *Legyen adva egy Wiener-folyamat a $[0, 1]$ intervallumban. Tekintsük ezt, mint egy értékeit a $C([0, 1])$ térben felvevő valószínűségi változót. Ennek eloszlását, azaz a $\mu_W(A) = P(\omega: W(\cdot, \omega) \in A)$ függvényt minden a $C([0, 1])$ térbeli Borel mérhető A halmazra, (azaz minden olyan A halmazra, amely benne van a $B([0, 1])$ térben lévő nyílt halmazok által generált legszűkebb σ -algebrában) Wiener-mértéknek nevezzük.*

Emlékeztetek továbbá arra, hogy az eloszlásban való konvergencia természetes általánosítását definiálták tetszőleges szeparábilis metrikus térben. Ezt gyenge konvergenciának nevezik általában az irodalomban, és euklidészi térben levő valószínűségi mértékek esetében ez ekvivalens az eloszlásban való konvergenciával. Több különböző alakja van ennek a definíciónak, de ezek mindegyike ekvivalens. A definíciókat megadom, de ekvivalenciájuk bizonyítását elhagyom.

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definíciója, a) definíció. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata egy (X, ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren értelmezett folytonos és korlátos*

$f(x)$ függvényre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx).$$

Megjegyzés. A fenti definícióban megköveteltük, hogy az $f(x)$ ‘tesztfüggvények’ ne csak folytonosak, hanem korlátosak is legyenek. Ez a megszorítás biztosítja, hogy mindig beszélhetünk a (véges) $\int f(x) \mu_n(dx)$ és $\int f(x) \mu(dx)$ integrálokról.

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definíciója, b1) definíció. Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata egy (X, ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren lévő zárt F halmazra

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definíciója, b2) definíció. Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata egy (X, ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren lévő nyílt G halmazra

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

Megjegyzés. A gyenge konvergencia a) definíciója és a korábban tanultak alapján kimondhatjuk, hogy eloszlásfüggvények F_n sorozata a számegyenesen akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy F eloszlásfüggvényhez, ha az F_n eloszlásfüggvények által meghatározott μ_n Stieltjes (valószínűségi) mértékek gyengén konvergálnak az F eloszlásfüggvény által meghatározott μ Stieltjes mértékhez.

Most kimondhatjuk az előbb szériasorozatok által definiált véletlen lineáris darabokból álló (töröttvonal) függvényeket értéként felvevő sztochasztikus folyamatok gyenge konvergenciáját a Wiener-mértékhez. Ezt a tételt az irodalomban funkcionális centrális határeloszlástételnek hívják.

Funkcionális centrális határeloszlástétel. Legyen adva egy a (B2) képletben leírt szériasorozat, amelynek tagjai teljesítik az $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq n_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$ relációkat és a Lindeberg feltételt. Vezessük be az e szériasorozat segítségével a (B3) formulában definiált folytonos trajektóriájú $X_k(t) = X_k(t, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatokat. Az $X_k(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak a Wiener mértékhez, ha $k \rightarrow \infty$.

Felmerül a kérdés, miért érdekes a fenti eredmény. Azért, mert ez nem pusztán egy absztrakt térben megfogalmazott változata a centrális határeloszlástételnek, hanem maguknak a szériasorozatok részletösszegeinek aszimptotikus viselkedéséről is lényeges új információt tartalmaz. Annak érdekében, hogy ezt megértsük lássuk be az alábbi egyszerű lemmát, amely azt fejezi ki, hogy egy folytonos transzformáció gyengén konvergens valószínűségi mértékek sorozatát ismét valószínűségi mértékek gyengén konvergens sorozatába visz. Pontosabban megfogalmazva a következő eredmény érvényes.

Lemma gyengén konvergens valószínűségi mértékek konvergenciájáról. *Legyen adva egy (X, \mathcal{X}) szeparábilis metrikus tér (itt \mathcal{X} a ρ metrika segítségével az X téren definiált nyílt halmazok által generált Borel σ -algebrát jelöli, és hasonlóan értelmezzük később az \mathcal{Y} σ -algebrát egy (Y, \mathcal{Y}) téren) és azon valószínűségi változók μ_n sorozata, $n = 1, 2, \dots$, amely az előbb definiált gyenge konvergencia értelmében konvergál egy μ valószínűségi mértékhez. Legyen adva ezenkívül egy másik (Y, \mathcal{Y}) szeparábilis metrikus tér, valamint egy T folytonos transzformáció az (X, \mathcal{X}) térből az (Y, \mathcal{Y}) térbe. Ez a transzformáció természetes módon indukál egy transzformációt, amely minden az (X, \mathcal{X}) téren definiált ν valószínűségi mértéknek a következő $T\nu$ valószínűségi mértéket felelteti meg az (Y, \mathcal{Y}) téren: $T\nu(B) = \nu(\{x: Tx \in B\})$ minden $B \in \mathcal{Y}$ halmazra. Ekkor a $T\mu_n$ valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak a $T\mu$ valószínűségi mértékhez.*

A lemma bizonyítása. Alkalmazzuk a gyenge konvergencia a) definícióját. Ekkor azt kell belátni, hogy tetszőleges az (Y, \mathcal{Y}) téren folytonos és korlátos $g(y)$ függvényre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(y) T\mu_n(dy) = \int g(y) T\mu(dy).$$

Vezessük be a $g(y)$ függvény $f(x) = g(Tx)$ ösképét. Ekkor az $f(x)$ függvény folytonos és korlátos, és a mértékelmélet egyik fontos eredménye alapján mértéktartó transzformációk szerinti integrálokról

$$\int f(x) \mu(dx) = \int g(y) T\mu(dy) \quad \text{és} \quad \int f(x) \mu_n(dx) = \int g(y) T\mu_n(dy)$$

minden $n = 1, 2, \dots$ számra. A μ_n mértékek gyenge konvergenciájából és az $f(x)$ függvény folytonosságából és korlátosságából következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx)$ a fenti szereposztással. A fenti összefüggésekből következik a lemma állítása.

Megjegyzés 1: Érdeemes megfogalmazni a fenti lemma állítását ekvivalens módon mértékek helyett (metrikus térbeli értékeket felvevő) valószínűségi változók segítségével. Ez így szól. Legyen adva (X, \mathcal{X}) szeparábilis, metrikus térbeli értékeket felvevő valószínűségi változóknak egy ξ_n , $n = 1, 2, \dots$ sorozata, amelyek eloszlásai (gyengén) konvergálnak egy ξ ((X, \mathcal{X}) térbeli értékeket felvevő) valószínűségi változó eloszlásához. Legyen T az (X, \mathcal{X}) tér egy folytonos leképezése valamely (Y, \mathcal{Y}) szeparábilis metrikus térbe. Ekkor a $T(\xi_n)$ valószínűségi változók eloszlásai eloszlásban konvergálnak a $T(\xi)$ valószínűségi változó eloszlásához.

Megjegyzés 2: Be lehet látni, hogy igaz a fenti lemma olyan élesítése, amely szerint a Lemma általánosítása érvényben marad akkor is, ha gyengítjük azt a feltételt, hogy a T transzformáció folytonos. Elegendő csak annyit megkövetelni, hogy a T transzformáció egy valószínűséggel folytonos a μ (határ)mérték szerint. Ez az általánosítás érdekes bizonyos alkalmazásokban.

A fenti lemma számunkra abban a speciális esetben érdekes, amikor az (X, \mathcal{X}) tér a $[0, 1]$ intervallumon definiált folytonos függvények $C([0, 1])$ tere, (Y, \mathcal{Y}) a számegyenes vagy egy véges dimenziós euklidészi tér a szokásos Borel σ -algebrával, és alkalmazunk egy T transzformációt a $C([0, 1])$ térből ebbe a véges dimenziós euklidészi térbe. Ekkor a funkcionális centrális határeloszlástételnek érdekes következményei vannak. Tekint-hetjük például a következő példákat: $T_1 f = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, $T_2 f = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$, $T_3 f =$

$\int_0^1 f^2(x) dx$, $T_4 f = (T_1 f, T_2 f, T_3 f)$. Ezen a transzformációk mindegyike folytonos, közülük az első három a számegyenesre, a negyedik a három dimenziós euklidészi térbe képez. A T_1 transzformáció alkalmazása például azt adja, hogy ha egy szériaszorozat

teljesíti a funkcionális centrális határeloszlástétel feltételeit, akkor a $\sup_{1 \leq j \leq n_k} \left| \sum_{p=1}^j \xi_{k,p} \right|$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy a $[0, 1]$ intervallumban definiált Wiener-folyamat szuprémumának eloszlásához. Hasonlóan lehet egy határeloszlástételt mondani T_2 , T_3 vagy T_4 transzformáció alkalmazása segítségével. Vegyük észre azt is, hogy a határeloszlás csak a határfolyamattól (a Wiener-folyamattól) függ, tehát minden a funkcionális centrális határeloszlástétel feltételeit teljesítő szériaszorozatra ugyanaz.

Informális módon a fenti eredmények úgy interpretálhatóak, hogy a funkcionális határeloszlástétel feltételeit teljesítő szériaszorozatokról képzett részletösszegek sorozatai nagy indexre hasonlóan viselkednek, és ezt a hasonló viselkedést a Wiener-folyamat segítségével írhatjuk le.

Végül megjegyzem, hogy Brown angol biológusnak az ismertetés elején említett azon megfigyelésének a háttérében, amely miatt a Wiener-folyamatot Brown mozgásnak is hívják, szintén a funkcionális centrális határeloszlástétel van. Egy apró részecske az idő folyamán sok egymástól független apró lökést kap, és mozgása az ezen lökések hatására végzett sok kis egymástól független elmozdulás összegeként áll elő. A funkcionális centrális határeloszlástétel szerint egy ilyen pálya közelítőleg úgy viselkedik, mint egy Wiener-folyamat trajektóriája.

Kiegészítés. *Megjegyzések a feladatok megoldásához.*

1. *feladat* Egy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ vektort k -dimenziós standard normális eloszlású vektornak nevezünk, ha koordinátái független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Azokat a vektorokat nevezzük normális eloszlásúnak, amelynek eloszlása megegyezik egy $\xi A + m$ véletlen vektor eloszlásával, ahol ξ standard normális eloszlású vektor, A egy $k \times k$ mátrix m egy k -dimenziós (determinisztikus) vektor. Némi számolással belátható, hogy egy ilyen vektor kovariancia mátrixa $D = A^*A$ alakú. A lineáris algebra bizonyos eredményeiből következik, hogy a $D = A^*A$ egyenletnek (rögzített D mátrixra) akkor és csak akkor van megoldása, ha D szimmetrikus pozitív (szemi)definit mátrix. (Miért?) Viszont egy ilyen egyenletnek nem csak egy A mátrix lehet a megoldása. Ennek ellenére a D kovariancia mátrix és az m várható érték mátrix meghatározza egy normális eloszlású vektor eloszlását. Ennek egy lehetséges magyarázata: Elég megmutatni, hogy a ξ normális eloszlású valószínűségi változó $Ee^{i(t, \xi)}$ karakterisztikus függvényét meghatározza a D kovariancia mátrix és m várható érték. Másrészt be lehet látni, hogy $Ee^{i(t, \xi)} = e^{-(t, Dt)/2 + i(m, t)}$.

2. *feladat* Az eloszlások megegyezéséhez a tekintett vektorok normális eloszlása és nulla várható értéke miatt elegendő a kovarianciamátrixok megegyezését ellenőrizni. A konzisztencia könnyen látható, ha megértjük, miről van szó.

3. *feladat* (Vázlatos indoklás) A σ -algebra csak megszámlálható sok koordinátától függő eseményeket tartalmaz. Egy függvény ismerete viszont megszámlálható sok koordinátájában nem határozza meg, hogy folytonos-e, mert a többi koordinátában el lehet rontani a folytonosságot.

4. *feladat* Mind a 4), mind a 4a) mind a 4b) feladat megoldása a következő állítás igazolásán alapul:

Tekintsük az $(R^{[0,1]}, \mathcal{C}^{[0,1]}) = \left(\prod_{t \in [0,1]} R_t, \prod_{t \in [0,1]} \mathcal{B}_t \right)$ szorzatteret, ahol R_t a számegyenesnek \mathcal{B}_t pedig a számegyenes σ -algebrájának egy a t számmal paraméterezett példánya. Jelölje Z az összes a $[0, 1]$ intervallumon folytonos függvényből álló halmazt, és tekintsük az $(R^{[0,1]}, \mathcal{C}^{[0,1]})$ tér (Z, \mathcal{Z}) megszorítását a Z halmazra. Ez azt jelenti, hogy vesszük a Z halmazt, és \mathcal{Z} azokból a B halmazokból áll, amelyek előállnak $B = Z \cap A$, $A \in \mathcal{C}^{[0,1]}$ alakban. Nem nehéz belátni, hogy \mathcal{Z} a Z halmaz bizonyos részhalmazából álló σ -algebra. Azt állítjuk, hogy tetszőleges a $C([0, 1])$ térben Borel mérhető halmaz benne van a \mathcal{Z} σ -algebrában. (Az is igaz, hogy a \mathcal{Z} σ -algebra megegyezik a $C([0, 1])$ tér Borel σ -algebrával, de ennek az állításnak a második felére nem lesz szükségünk.)

Az előbbi állítás bizonyításához elég megmutatni azt, hogy a $C([0, 1])$ tér minden G nyílt halmazára $G \in \mathcal{Z}$, mert ebből következik, hogy minden a nyílt halmazok által generált σ -algebrájában levő B halmazra, $B \in \mathcal{Z}$.

Tovább lehet redukálni az állítást a következő típusú halmazokra: Ha $x = x(t) \in C([0, 1])$, $\varepsilon > 0$, akkor legyen $S(x, \varepsilon) = \{y: y \in C([0, 1]), \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon\}$. Elég

belátni, hogy minden $S(x, \varepsilon)$ típusú halmazra $S(x, \varepsilon) \in \mathcal{Z}$, mert tetszőleges nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok ilyen halmaz uniójaként. A következő megfontolás mutatja, hogy $S(x, \varepsilon) \in \mathcal{Z}$. Jelölje Q a racionális számok halmazát a $[0, 1]$ intervallumban. Ekkor

$$S(x, \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r \in Q} \left\{ y : y \in Z, |y(r) - x(r)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon \right\} \right) \in \mathcal{Z}.$$

(Miért?)

Az, hogy az $X(\cdot, \omega)$ folytonos trajektóriájú folyamat azt jelenti, hogy $X(\cdot, \omega) \in Z$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre. Mivel a $C([0, 1])$ tér minden B Borel mérhető halmaza előáll $B = A \cap Z$, $A \in \mathcal{C}^{[0, 1]}$ alakban, ezért $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in B\} = \{\omega : X(\cdot, \omega) \in B \cap Z\} = \{\omega : X(\cdot, \omega) \in A\} \in \mathcal{A}$, és a $P(X(\cdot, \omega) \in A) = P(X(\cdot, \omega) \in B)$ valószínűséget meghatározzák az $X(\cdot, \omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai. Innen következik mind a 4a) mind a 4b) feladat állítása.

5. feladat Parciális integrálással belátható, hogy

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du &= \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^{\infty} \frac{1}{u^2} e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2} + \int_x^{\infty} \frac{3}{u^4} e^{-u^2/2} du, \end{aligned}$$

és ebből az azonosságból levezethető a feladat állítása.