Felmérő dolgozat

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definicióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1.) Egy szabályos pénzdarabot feldobunk egymástól függetlenül 20 alkalommal. Tekintsük a fejdobások számának a négyzetét, és számítsuk ki ennek a várható értékét.

2.) Számoljuk ki egy $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.

3.) Egy szabályos dobókockát 3000 alkalommal feldobunk egymástól függetlenül. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlásfüggvény táblázat segítségével arra, hogy a hatos dobások száma 400 és 600 közé esik.

4.) Mikor mondjuk azt, hogy F_n, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata eloszlásban konvergál egy F eloszlásfüggvényhez?

5.) Mikor mondjuk azt, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata teljesíti a nagy számok gyenge illetve erős törvényét?

6.) Mi a több-dimenziós normális eloszlás definiciója?

Megoldások

1. Vezessük be a következő ξ_j valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, 0, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 20$. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $E\left(\sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j\right)^2 = \sum\limits_{j=1}^{20} E\xi_j^2 + \sum\limits_{\substack{1\le j,k\le 20\\ j\ne k}} E\xi_j E\xi_k$ összeg. (Ebben a számolásban kihasználtuk a ξ_j változók függetlenségét.) Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $1 \le j \le k$, ezért $E\left(\sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j\right)^2 = 20 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot 19 \cdot \frac{1}{4} = 105$.

2. A kérdezett karakterisztikus függvény értéke a t pontban a következő integrállal egyenlő:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+itx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x+itx}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x+itx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x(1+it)}}{1+it}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x(-1+it)}}{-1+it}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it}\right) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Megjegyzés: Érdemes megjegyezni a karakterisztikus függvény néhány olyan egyszerű tulajdonságát, melyek segítenek bizonyos számolási hibák észrevételében. Tudjuk, hogy ha $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény, akkor $\varphi(0) = 0$. Ha egy olyan valószínűségi változó karakterisztikus függvényét számoljuk ki, melynek van $f(x)$ sűrűségfüggvénye, és az páros függvény, azaz $f(-x) = f(x)$ minden x számra, akkor e valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénye valós értékű páros függvény. Valóban, $\varphi(t) = \int_\infty^\infty e^{itx} f(x)\,dx = \int_\infty^\infty (\cos tx + i \sin tx) f(x)\,dx = \int_\infty^\infty \cos tx f(x)\,dx$, és ez valós értékű, páros függvény. (Kihasználtuk, hogy $f(x)\cos tx$ páros, $f(x)\sin tx$ pedig páratlan függvény, ezért az utóbbi függvény integrálja minusz végtelentől végtelenig nullával egyenlő.)

3.) Jelölje S a 3000 dobásban a hatos dobások számát. Ez 3000 független, egyforma eloszlású valószínűségi változó összege, (melyek eggyel egyenlőek, ha a megfelelő dobás eredménye hatos, és nullával, ha az nem hatos. Ezért az összeadandók várható értéke $\frac{1}{6}$, szórásnégyzete $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$, $ES = 3000\cdot\frac{1}{6} = 500$, $\mathrm{Var}\, S = 3000\cdot\frac{5}{36} = \frac{2500}{6}$, és a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(u < \frac{S-500}{\sqrt{\frac{2500}{6}}} < v\right) \sim (\Phi(v) - \Phi(u))\,,$$

ahol $\Phi(\cdot)$ a stadard normális eloszlásfüggvény. Ezért

$$\begin{aligned} P(400 < S < 600) &= P\left(-2\sqrt{6} < \frac{S-500}{\sqrt{\frac{2500}{6}}} < 2\sqrt{6}\right) \\ &\sim \left(\Phi(2\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6})\right) = 2\Phi(2\sqrt{6}) - 1 \sim 2\Phi(4.89) - 1 \sim 1, \end{aligned}$$

tehát a vizsgált valószínűség majdnem egy.

A kérdezett definiciókat nem írjuk le. Ezek megtalálhatóak a gyakorlatokról leírt összefoglalókban is.