Kitűzött feladatok

1.* Adott egy urna, és abban 7 piros és 3 fehér golyó. Egymás után húzunk ebből az urnából. Minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik azonos színű golyóval együtt. Mi az első tíz húzás során kihúzott piros golyók számának

   a.) várható értéke,

   b.) szórásnégyzete. (Kitűzve szeptember 21-én.)

2. Legyenek $A_1, \dots, A_k$ független események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Fejezzük ki a $P(A_1 + \cdots + A_k)$ valószínűséget a $P(A_j)$, $j = 1, \dots, k$, valószínűségek segítségével. (Kitűzve szeptember 21-én.)

3. Legyenek adva valamilyen $A_1, \dots, A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha ezek $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}$ indikátor függvényei független valószínűségi változók. (Kitűzve szeptember 28-án.)

4.* Definiáljuk az $\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt a következő módon: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ a $[0, 1)$ intervallum Borel mérhető részhalmazainak a σ-algebrája, P a Lebesgue mérték, azaz $P([a, b)) = b - a$, ha $0 \le a < b < 1$. Adva egy $x \in [0, 1)$ pont (azaz elemi esemény), írjuk fel ezt a számot $x = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$ végtelen "kettedes"-tört alakban, ahol $\varepsilon_k = 0$ vagy $\varepsilon_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$. (Az egyértelmű felírás érdekében abban az esetben, ha egy számot kétféleképpen írhatunk fel, a sorozat végén vagy csupa 0-val vagy csupa 1-gyel, akkor írjuk fel ezt a számot a végén csupa egyessel.) Definiáljuk a $\xi_n = \xi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat a következő módon. Legyen $\xi_n(x) = 0$, ha az $x = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \dots$ "kettedes-tört" n-ik számjegye 0, $\xi_n(x) = 1$, ha ez a számjegy 1. Lássuk be, hogy ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók, és $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = 0) = \frac{1}{2}$. (Kitűzve október 5-én.)

5. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ olyan független valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \dfrac{1}{2}$. Legyen továbbá τ a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, amelyik pozitív egész értékeket vesz fel. Lássuk be, hogy a véletlen indexű ξ_τ valószínűségi változó teljesíti a $P(\xi_\tau = 0) = P(\xi_\tau = 1) = \frac{1}{2}$ relációt. (Kitűzve október 5-én.)

6.* Lássuk be, hogy

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{-k-1}{n-k} (-x)^n = x^k (1-x)^{-k-1},$$

ha $|x| < 1$, és számítsuk ki ennek az azonosságnak a segítségével az október 5-i gyakorlat első feladatában vizsgált valószínűséget az ott szereplő összeg explicit kiszámításával. (Kitűzve október 5-én.)

A * jelzésű feladatok nem kötelezőek.

7.* Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor az

$$A = A(a) = \left\{\omega\colon\ \limsup_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = a\right\}$$

esemény eleme a $\mathcal{A}$ σ-algebrának, tehát létezik a $P(A)$ valószínűség. (Kitűzve október 12-én.)

8. Konstruáljunk olyan ξ valószínűségi változót alkalmas $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyre $E\xi^2 < \infty$, de $E\xi^4 = \infty$. (Kitűzve október 12-én.)

9. Tekintsünk egy szabályos pénzdarab egymás utáni (független) feldobásából származó 10 000 hosszúságú fej-írás sorozatot. Adjunk becslést a Chebishev egyenlőtlenség segítségével annak valószínűségére, hogy a fej-dobások számának eltérése a várt 5000 számtól legalább 100-zal, illetve legalább 200-zal eltér! Milyen becslést ad ezekre a valószínűségekre a centrális határeloszlástétel? (Használjunk normális eloszlás függvény táblázatot! Ilyen táblázat található például Rényi Alfréd Valószínűségszámítás című könyvének a végén, de valószínűleg a statisztika jegyzet is tartalmaz ilyen táblázatot.) (Kitűzve október 12-én.)

10. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 10 alkalommal. Kiszámítjuk a 10 dobás eredményének az összegét. Mi ezen véletlen összeg négyzetének a várható értéke? (Kitűzve október 19-én.)

11. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ egész értékű valószínűségi változók, melyek tetszőleges $k_1, \dots,$ k_n egész számokra, és az $1, \dots, n$ tetszőleges permutációjára teljesítik a

$$P(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) = P(\xi_{\pi(1)} = k_1, \dots, \xi_{\pi(n)} = k_n)$$

azonosságot. Ekkor tetszőleges $1 \le i < j \le n$ számokra a (ξ_1, ξ_2) illetve (ξ_i, ξ_j) vektorok eloszlása megegyezik. Ezért $E\xi_i\xi_j = E\xi_1\xi_2$, $E\xi_1 = E\xi_j$. (Kitűzve október 19-én.)

12.* Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$. (Kitűzve október 19-én.)

13.* A ξ valószínűségi változónak akkor és csak akkor létezik véges második momentuma, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$. Általánosabban $E|\xi|^k < \infty$ valamilyen $k = 1, 2, \dots,$ számra akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1}P(|\xi| > n) < \infty$. (Kitűzve október 19-én.)

14. Egy $F(x)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t) = \int e^{itx}\, dF(x)$ karakterisztikus függvénye, $-\infty < t < \infty$, folytonos, sőt egyenletesen folytonos függvény a számegyenesen. (Kitűzve november 2-án.)

15.* Legyen ξ_k, $k=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x)=\dfrac{C}{x^2\log|x|}$, ha $|x|>2$. $f(x)=0$, ha $|x|\le 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. ($\displaystyle\int_{|x|>2}\frac{C\,dx}{|x|\log|x|}=1$.) Definiáljuk az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k$, $n=1,2,\dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon>0$ számra $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)\to 0$, ha $n\to\infty$.

Segítség: Legyen $\bar\xi_k=\bar\xi_k^{(n)}=\xi_k I\left(|\xi_k|\le a_n\right)$, $\bar{\bar\xi}_k=\bar{\bar\xi}_k^{(n)}=\xi_k I\left(|\xi_k|>a_n\right)$, és $\bar S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\bar\xi_k$, $\bar{\bar S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\bar\xi}_k$. Ekkor $P(|S_n|>\varepsilon n)\le P\left(|\bar S_n|>\frac{\varepsilon}{2}n\right)+P\left(|\bar{\bar S}_n|>\frac{\varepsilon}{2}n\right)\le \dfrac{\operatorname{Var}\bar S_n}{\frac{\varepsilon^2}{4}n^2}+nP(\bar{\bar\xi}_1\ne 0)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n=n$) jó becslést a $P(|S_n|>n\varepsilon)$ valószínűségre. (Kitűzve november 9-én.)

16.* Legyen $\xi_{k,j}$, $j=1,\dots,n_k$ valószínűségi változók szériasorozata, melyek rögzített k-ra függetlenek. Tegyük fel ezen kívül, hogy

(i) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem-negatív egész értékeket vesznek fel, $P(\xi_{k,j}=1)=\lambda_{k,j}$, $P(\xi_{k,j}\ge 2)=o(\lambda_{k,j})$, $1\le j\le n_k$, és a $o(\cdot)$ egyenletes j-ben.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}=0$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}\to\lambda>0$

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy Poisson eloszlású valószínűségi változóhoz λ paraméterrel. (Kitűzve november 9-én.)

17. Ha a ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $f(u)=\lambda e^{-\lambda u}$, ha $u\ge 0$, $f(u)=0$, ha $u<0$, akkor ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-it}$. (Kitűzve november 9-én.)

18. Lássuk be a (karakterisztikus függvény módszer felhasználásaával), hogy ha ξ_λ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor a $\dfrac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz $\lambda\to\infty$ esetén. (Kitűzve november 9-én.)

19. Ha a ξ valószínűségi változó negativ binomiális eloszlású $n=1$ és p paraméterrel, $0<p<1$, azaz $P(\xi=k)=p^k(1-p)$, $k=0,1,2,\dots$, akkor ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t)=\dfrac{1-p}{1-pe^{it}}$. (Kitűzve november 9-én.)

20.* Ha a ξ valószínűségi változó negativ binomiális eloszlású n és p paraméterrel, ahol $n\ge 1$ egész szám, $0<p<1$, azaz $P(\xi=k)=\binom{n+k-1}{k}p^k(1-p)^n$, $k=$

$0, 1, 2, \ldots$, akkor ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \left(\dfrac{1-p}{1-pe^{it}}\right)^n$. (Kitűzve november 9-én.)

21.* Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $[0,1]$-en, és $\mathbf{P}$ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x) = \Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x) = \begin{cases} \xi(1-x) & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \xi\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Lássuk be, hogy ξ és η normális eloszlású valószínűségi változók, de a (ξ, η) vektor nem normális eloszlású valószínűségi vektor.

Segítség: Egy lehetséges magyarázat arra, hogy a (ξ, η) vektor nem normális az, hogy $P(\xi + \eta = 0) = \frac{1}{2}$. (Kitűzve december 7-én.)

22.* Legyen A tetszőleges $k \times l$ téglalap mátrix, (zaz nem tesszük fel, hogy $k = l$), $\eta_1, \ldots, \eta_l$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az $(\xi_1, \ldots, \xi_k) = (\eta_1, \ldots, \eta_l)A$ véletlen vektor nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó.

Segítség: Írjuk fel a $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvényét. Lássuk be, hogy ez egy $\Sigma = A^*A$ kovarianciamátrixú nulla várható értékű normális eloszlású véletlen vektor. Speciálisan, A^*A pozitív szemidefinit mátrix az általános (téglalapmátrixokra is érvényes) esetben. (Kitűzve december 7-én.)