Az november 2-i szeminárium témája
Rövid összefoglaló

A sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia közötti kapcsolat.

Tárgyaljuk a sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia kapcsolatát. Egyszerű példa mutatja, hogy lehetséges az, hogy ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozat eloszlásban konvergál, de sztochasztikusan nem. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, nem elfajuló eloszlással, akkor ezen valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak, de sztochasztikusan nem. Belátjuk, hogy ha valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál, akkor eloszlásban is konvergál.

Tegyük fel, hogy valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata sztochasztikusan konvergál egy ξ valószínűségi változóhoz, és jelölje $F(u)$ a ξ valószínűségi változó eloszlását. Legyen x pont az $F(\cdot)$ függvény folytonossági pontja. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, melyre $F(x) - \frac{\varepsilon}{2} < F(x - \delta) \le F(x) \le F(x + \delta) < F(x) + \frac{\varepsilon}{2}$, és $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ küszöbindex, melyre $P(|\xi_n - \xi| > \delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \ge n_0$. Ekkor $P(\xi_n < x) \le P(\xi < x + \delta) + P(|\xi_n - \xi| > \delta) \le F(x + \delta) + \frac{\varepsilon}{2} \le F(x) + \varepsilon$. Hasonlóan mutatható meg, hogy $P(\xi_n > x) \le P(\xi > x - \delta) + \frac{\varepsilon}{2} \le 1 - F(x) - \varepsilon$, azaz $P(\xi_n < x) > F(x) - \varepsilon$. Mivel ezek az állítások minden $\varepsilon > 0$ és $n \ge n_0$ számra igazak valamilyen $n = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex-szel, innen következik az állítás.

Bár az eloszlásban való konvergenciából nem következik a sztochasztikus konvergencia, igaz a következő gyengébb állítás: Ha a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak az a pontba koncentrált eloszláshoz valamilyen $-\infty < a < \infty$ számmal, azaz konvergálnak ahhoz az $F(u) = F_a(u)$ eloszlásfüggvényhez, melyre $F(u) = 0$, ha $u \le a$, és $F(u) = 1$, ha $u > a$, akkor a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak a $\xi(\omega) \equiv a$ valószínűségi változóhoz. Valóban, ekkor $P(|\xi_n - a| < \varepsilon) = F_n(a + \varepsilon) - F_n(a - \varepsilon + 0) = 1 + (F_n(a + \varepsilon) - F(a + \varepsilon)) - (F_n(a - \varepsilon + 0) - F(a - \varepsilon + 0))$, ahol $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, a ξ_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $G(u + 0) = \lim\limits_{\varepsilon\colon\, \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} G(u + \varepsilon)$ egy $G(u)$ eloszlásfüggvényre, és $F(u) = F_a(u)$ az előbb definiált eloszlásfüggvény. Ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} (F_n(a+\varepsilon) - F(a+\varepsilon)) = 0$, és $\lim\limits_{n \to \infty} (F_n(a - \varepsilon + 0) - F(a - \varepsilon + 0)) = 0$ az eloszlásban való konvergencia miatt, ezért $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\xi_n - a| < \varepsilon)$, azaz teljesül a sztochasztikus konvergencia is.

Miért csak a határeloszlás folytonossági pontjaiban követeltük meg a konvergenciát az eloszlásban való konvergencia definiciójában?

Amikor eloszlásfüggvényeket vizsgálunk, akkor sokszor érdemes az eloszlásfüggvény helyett az általuk meghatározott valószínűségi mértéket tekinteni. Azaz, adva valamilyen $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény, definiáljuk azt a $\mu = \mu_F$ valószínűségi mértéket a számegyenesen, melyre $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$. A mértékelmélet eredményeiből következik, hogy létezik ilyen valószínűségi mérték, és azt egyértelműen meghatározza az F eloszlásfüggvény. Ezt a valószínűségi mértéket szemléletesen úgy képzelhetjük el, mint egy tömegeloszlást a számegyenesen, melyre a teljes számegyenes tömege (súlya) 1, és a számegyenes egy részhalmazának a valószínűsége megegyezik a halmaz súlyával. Az, hogy F_n eloszlásfüggvények sorozata konvergál valamely F eloszláshoz valójában azt jelenti, hogy az általuk meghatározott μ_{F_n} tömegeloszlások konvergálnak a μ_F tömegeloszláshoz.

Tekintsük a következő egyszerű példát: Legyen a_n olyan monoton növekedő számsorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ valamely $-\infty < a < \infty$ számra. Legyen μ_n az a valószínűségi mérték, mely az a_n pontba van koncentrálva, $n = 1, 2, \dots$, azaz $\mu_n(B) = 1$, ha $a_n \in B$, és $\mu_n(B) = 0$, ha $a_n \notin B$ a számegyenes tetszőleges mérhető részhalmazára. Hasonlóan, legyen μ az a pontba koncentrált mérték. Természetes azt várni, hogy ha alkalmasan definiáltuk az eloszlásban való konvergencia fogalmát, akkor a μ_n eloszlások konvergálnak a μ mértékhez. A μ_n mérték által meghatározott eloszlásfüggvény, azaz egy olyan ξ_n valószínűségi változónak az eloszlásfüggvénye, melyre $P(\xi_n = a_n) = 1$, az az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvény, melyre $F_n(u) = 0$, ha $u \le a_n$, és $F_n(u) = 1$, ha $u > a_n$. Hasonlóan, a μ mérték által meghatározott eloszlásfüggvény az az $F(\cdot)$ függvény, melyre $F(u) = 0$, ha $u \le a$, és $F(u) = 1$, ha $u > a$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(u) = F(u)$ minden $u \ne a$ számra ebben a példában, de ez a reláció az $u = a$ számra nem teljesül. Tehát a μ_n mértékek eloszlásban konvergálnak ebben a példában, de ehhez szükséges volt az eloszlásban való konvergencia definiciójában azt a megszorítást tenni, hogy csak határeloszlásfüggvény folytonossági pontjaiban követeljük meg a konvergenciát.

A $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$ normális eloszlásfüggvény minden pontban folytonos, ezért a centrális határeloszlástétel alkalmazásában nincs jelentősége annak, hogy az eloszlásban való konvergencia csak az eloszlásfüggvény folytonossági pontjaiban követelünk meg konvergenciát. Viszont olyan határeloszlástételben, melyben a határeloszlásnak van szakadási pontja (például a Poisson eloszlás vagy bármely diszkrét eloszlás ilyen) ez a megszorítás lényeges. Kimondunk bizonyítás nélkül egy eredményt, mely ekvivalens feltételt ad arra, hogy eloszlásfüggvények egy sorozata eloszlásban konvergáljon egy határeloszláshoz. Ennek az eredménynek fontos szerepe van a karakterisztikus függvény módszer alkalmazásában is.

Tétel. *$F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre*

$$\lim_{n\to\infty} \int g(u)\, dF_n(u) = \int g(u)\, dF(u).$$

Eloszlásban való konvergencia és határeloszlástételek.

Vegyük észre, hogy mivel az $f_t(x) = e^{itx}$, $-\infty < t < \infty$, függvények folytonosak és korlátosak, ezért az eloszlásfüggvényeknek a fenti Tétel-ben kimondott jellemzése alapján eloszlások konvergenciájából következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int e^{itx} F_n(\,dx) = \int e^{itx} F(\,dx)$, minden $-\infty < t < \infty$ számra, ha az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez. Felmerül a kérdés: Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása is, azaz, ha tudjuk, hogy a $\varphi_n(t) = \varepsilon^{itx}F_n(dx) \to \varphi(t) = \int e^{itx}F(\,dx)$, ha $n \to \infty$ reláció teljesül egy $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvénysorozatra valamint egy F eloszlásfüggvényre, akkor következik-e ebből az, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez? Az előző formulában bevezetett $\varphi(t) = \int e^{itx}F(\,dx)$ függvényt nevezzük az F eloszlás karakterisztikus függvényének.

A valószínűségszámítás egyik alapvető fontosságú eredménye szerint a válasz erre a kérdésre igenlő. Jegyezzük meg, hogy ezen állításnak a bizonyításához szükséges egy olyan jellegű eredmény, mely azt mondja ki, hogy az $e(t) = e^{itx}$ trigonometrikus függvények az összes folytonos és korlátos függvényekből álló halmaznak elég nagy részhalmaza. Ugyanis, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \int e^{itx}F_n(\,dx) = \int e^{itx}F(\,dx)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra, akkor teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int \sum_{k=1}^{p} c_k e^{it_k x}F_n(\,dx) = \int \sum_{k=1}^{p} c_k e^{t_k x}F(\,dx)$ reláció minden véges lineáris kombinációra is, sőt bízonyos limeszeléssel eljutunk további olyan $g(\cdot)$ függvényekhez, melyekre $\lim\limits_{n\to\infty} \int g(x)F_n(\,dx) = \int g(x)F(\,dx)$. De eljutunk-e így minden folytonos és korlátos függvényhez. A valószínűségszámítás egyik mély eredménye szerint igen. (Egy lehetséges eredmény, melyet felhasználhatunk a bizonyításban Weierstrass második approximációs tétele, mely szerint minden 2π szerint periodikus folytonos függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető trigonometrikus polinomokkal.) Valójában a valószínűségszámítás előbb jelzett klasszikus eredménye egy még tartalmasabb állítás. Ugyanis a részletesebb vizsgálatokban gyakran találkozunk a következő kérdéssel: Tudjuk, hogy a $\varphi_n(t) = \int e^{itx}F(\,dx)$ karakterisztikus függvények konvergálnak valamely $\varphi(t)$ függvényhez, de nem tudjuk ab ovo, hogy a $\varphi(t)$ függvény előállítható-e, mint egy alkalmas eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye. Az alább megfogalmazott *fundamentális jelentőségű* eredmény az ilyen esetek vizsgálatát is lehetővé teszi.

Eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel. *Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, F_n eloszlású valószínűségi változók sorozata $\varphi_n(t) = Ee^{it\xi_n} = \int e^{itx}F_n(dx)$ karakterisztikus függvénnyel. Ha a $\varphi_n(t)$ függvények minden $-\infty < t < \infty$ számra konvergálnak egy $\varphi(t)$ függvényhez, mely az origóban folytonos függvény, akkor ez a $\varphi(t)$ limeszfüggvény is karakterisztikus függvény, azaz létezik olyan (egyértelműen meghatározott) $F(x)$ eloszlásfüggvény, melyre $\varphi(t) = \int e^{itx}F(\,dx)$. Továbbá, az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az F eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha F_n eloszlások, $n = 1, 2, \dots$, sorozata eloszlásban konvergál egy F eloszláshoz, akkor minden $-\infty < t < \infty$ számra a $\varphi_n(t) = \int e^{itx}F_n(dx)$ karakterisztikus függvények konvergálnak a $\varphi(t) = \int e^{itx}F(dx)$ karakterisztikus függvényhez, ha $t \to \infty$. Továbbá ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Talán érdemes lett volna ennek az eredménynek a megfogalmazása előtt kimondani a következő tételt.

Tétel. *Egy F eloszlásfüggvényt meghatároz annak $\varphi(t) = \int e^{itx}F(\,dx)$ karakterisztikus függvénye.*

A következő állítás bizonyítása házi feladat.

> Egy $F(x)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t)=\int e^{itx}\,dF(x)$ karakterisztikus függvénye, $-\infty<t<\infty$, folytonos, sőt egyenletesen folytonos függvény a számegyenesen.

Lássunk példát arra, hogy lehetséges az, hogy F_n, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények sorozatának a karakterisztikus függvényei egy az origóban nem folytonos függvényhez konvergálnak. Ebben az esetben az F_n eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban egy eloszlásfüggvényhez. Ez a példa megmutatja, hogy a fent kimondott tételben az a megkötés, hogy a $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvények $\varphi(\cdot)$ határfüggvénye az origóban folytonos függvény, nem elhagyható feltétel.

Legyen az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvény a $[-n,n]$ intervallumben egyenletes eloszlás, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $f_n(x)=\dfrac{1}{2n}$, és $f_n(x)=0$, ha $|x|>n$. Ekkor ezek az F_n, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények eloszlásban nem konvergálnak egy határeloszláshoz, mert az általuk meghatározott tömegeloszlás "kifolyik a végtelenben." A karakterisztikus függvények a $\varphi_n(t)=\int e^{itx}F_n(dx)=\displaystyle\int_{-n}^{n}\frac{e^{itx}}{2n}\,dx=\frac{e^{itn}-e^{-itn}}{2int}$ függvények, $t\neq 0$, $\varphi_n(0)=1$, $n=1,2,\dots$. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=0$, ha $t\neq0$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$.

A karakterisztikus függvény másik folytonos tulajdonsága, mely hasznossá teszi határeloszlástételek vizsgálatában az, hogy független valószínűségi változók összegének a karakterisztikus függvénye megegyezik az egyes valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával. Képletben kifejezve: Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók. Ekkor

$$Ee^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)}=E\left(e^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\cdots e^{it\xi_n}\right)=Ee^{it\xi_1}Ee^{it\xi_2}\cdots Ee^{it\xi_n}.$$

Továbbá, ha egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a $\varphi(t)=Ee^{itX}$ függvény, akkor az $AX+B$ karakterisztikus függvénye a

$$\psi(t)=Ee^{it(AX+B)}=e^{itB}Ee^{i(At)\xi}=e^{itB}\varphi(At).$$

E két képlet felhasználásával kifejezhetjük független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek karakterisztikus függvényét az egyes valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek segítségével. Egy ilyen formula valamint az Alaptételnek nevezett eredmény lehetővé teszi azt, hogy független valószínűségi változók normalizált részletösszegeire szóló határeloszlástételeket bizonyítsunk.

Egy példa: (Valójában a legfontosabb alkalmazás:) Legyen ξ_k, $k=1,2,\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyekre $E\xi_1=0$, $E\xi_1^2=1$. Ekkor az $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változók teljesítik a centrális határeloszlástételt. Ennek bizonyítása érdekében számoljuk ki a $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Jelölje a ξ_1 valószínűségi változó eloszlásfüggvényét F, karakterisztikus függvényét pedig $\varphi(t)$. Ekkor S_n karakterisztikus függvénye $\varphi^n(t)$, és $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ karakterisztikus függvénye $\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Tehát annak bizonyításához, hogy e normalizált részletösszegeknek létezik határeloszlása azt kell belátni, hogy minden t számra létezik a $\psi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ határérték, és ez a $\psi(t)$ függvény folytonos az origóban. E vizsgálathoz arra van szükség, hogy $\varphi(t)$ értékét jól tudjuk becsülni kis t számokra. A karakterisztikus függvény egyik fontos tulajdonsága, hogy $\varphi(0) = 1$, és $\left.\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = i^k E\xi^k$, ha $E|\xi|^k = 0$. Ezt onnan láthatjuk, hogy a $\varphi(t) = \int e^{itx}\, dF(x)$ formulát k-szor szukcesszive deriválva kapjuk, hogy $\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k} = \int i^k e^{itx}\, dF(x)$ képletet, és behelyettesítjük a $t = 0$ számot ebbe a formulába. Az $E|\xi^k| < \infty$ feltétel azt biztosította, hogy a fenti számolás jogos, fel lehet cserélni az integrálást és differenciálást.

Ezért, ha $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = 1$, akkor a Taylor sorfejtés alapján $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1} = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = e^{-t^2/2}$. Ezért létezik a határeloszlás, melynek karakterisztikus függvénye $e^{-t^2/2}$. Ez a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye, és ez adja a centrális határeloszlástételt.

Kis kitérő: A nagy számok gyenge törvénye

Láttuk, hogy az hogy X_n valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan egy (determinisztikus) a konstanshoz tart ekvivalens azzal, hogy e valószínűségi változók sorozata eloszlásban tart a számegyenes a pontjába koncentrált mértékhez. Ez pedig az Alaptétel szerint azzal ekvivalens, hogy ezek a valószínűségi változók $\psi_n(t) = Ee^{itX_n}$ karakterisztikus függvényei az a pontba koncentrált mérték karakterisztikus függvényéhez, azaz az e^{ita} függvényhez tartanak.

Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, jelölje ezek részletösszegeit, és $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1}$ a ξ_1 karakterisztikus függvényét. E sorozat akkor és csak akkor teljesíti a nagy számok gyenge törvényét, azaz az $\frac{S_n}{n}$ átlagok akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan egy $-\infty < a < \infty$ számhoz, ha teljesül az $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) = e^{ita}$ minden t számra. Némi számolással belátható, hogy ez ekvivalens azzal, hogy a karakterisztikus függvény a nullában deriválható, és ez a differenciálhányados $\varphi'(0) = ia$. Ez az eredmény azonban nem teljesen kielégítő, ugyanis általában nem a karakterisztikus függvényt, hanem az eloszlásfüggvényt ismerjük. Ezért hasznosabb a következő a Fourier transzormáció tulajdonságain alapuló tétel.

Tétel. *Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, F eloszlású valószínűségi változók sorozata.*

Ez akkor és csak akkor teljesíti a nagy számok gyenge törvényét, azaz a $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ *átlag akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan* $n\to\infty$ *esetében egy a számhoz,* $-\infty<a<\infty$*, ami ekvivalens azzal, hogy a* $\varphi(t)=Ee^{it\xi_1}$ *karakterikus függvény deriválható az origóban, és* $\varphi'(0)=ia$*, ha*

$$\lim_{x\to\infty} x\left[F(-x)+(1-F(x))\right]=0, \quad \textit{és} \quad \lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u} xF(\,dx)=a.$$

Ez az eredmény és a múlt alkalommal tárgyalt eredmény a nagy számok erős törvényéről lehetőséget ad olyan példa konstruálására, mely teljesíti a nagy számok gyenge törvényét, de nem teljesíti a nagy számok erős törvényét. Valóban, legyen ξ_k, $k=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata melyeknek létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye, melyet a következő képlet ad meg. $f(x)=\dfrac{C}{x^2\log|x|}$, ha $|x|>2$. $f(x)=0$, ha $|x|\le 2$, a C konstanst pedig úgy választjuk, hogy $\int f(x)\,dx=1$. Ekkor $E|\xi_1|=\int|x|f(x)\,dx=\infty$, (Miért?) ezért nem teljesül a nagy számok erős törvénye. Az előbb kimondott, de nem bizonyított tételből következik, hogy ez a sorozat teljesíti a nagy számok gyenge törvényét. De ezt az állítást be lehet látni közvetlenül is. Erről szól a következő (nem kötelező) házi feladat.

Legyen ξ_k, $k=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x)=\dfrac{C}{x^2\log|x|}$, ha $|x|>2$. $f(x)=0$, ha $|x|\le 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. $\left(\displaystyle\int_{|x|>2}\frac{C\,dx}{|x|\log|x|}=1.\right)$ Definiáljuk az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k$, $n=1,2,\dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon>0$ számra $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)\to 0$, ha $n\to\infty$.

Segítség: Legyen $\bar\xi_k=\bar\xi_k^{(n)}=\xi_k I\left(|\xi_k|\le a_n\right)$, $\bar{\bar\xi}_k=\bar{\bar\xi}_k^{(n)}=\xi_k I\left(|\xi_k|>a_n\right)$, és $\bar S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\bar\xi_k$, $\bar{\bar S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\bar\xi}_k$. Ekkor $P(|S_n|>\varepsilon n)\le P\left(|\bar S_n|>\frac{\varepsilon}{2}n\right)+P\left(|\bar{\bar S}_n|>\frac{\varepsilon}{2}n\right)\le \dfrac{\operatorname{Var}\bar S_n}{\frac{\varepsilon^2}{4}n^2}+nP(\bar{\bar\xi}_1\ne 0)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n=n$) jó becslést a $P(|S_n|>n\varepsilon)$ valószínűségre.