Az november 9-i szeminárium témája
Rövid összefoglaló

Poisson eloszlás karakterisztikus függvénye. Határeloszlástételek Poisson eloszlású határértékkel.

Legyen ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, azaz $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2.\dots.$ Számítsuk ki ξ karakterisztikus függvényét.

$$Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!} = \exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}.$$

Innen kiolvasható az az egyébként ismert eredmény, mely szerint két független λ és μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó összege Poisson eloszlású $\lambda + \mu$ paraméterrel.

Megfogalmazunk és bebizonyítunk egy határeloszlástételt, melyben a határeloszlás a Poisson eloszlás.

Legyen adva minden $n = 1, 2, \dots,$ számra n független, $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}$ valószínűségi változó, melyek mindegyike 0 vagy 1 értéket vesz fel, $P(\xi_{k,n} = 1) = 1 - P(\xi_{k,n} = 0) = \lambda_{k,n}$, $1 \le k \le n$. Tegyük fel, hogy ezek a $\lambda_{k,n}$ értékek egy rögzített nagy n számra egyenletesen kicsik, összegük pedig körülbelül λ, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\le k\le n} \lambda_{k,n} = 0$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} = \lambda$. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{k,n}$. Állítás: Az S_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz.

Bizonyítás: Számítsuk ki az S_n valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.

$$Ee^{itS_n} = \prod_{k=1}^{n} Ee^{it\xi_{k,n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \lambda_{k,n} + \lambda_{k,n}e^{it\lambda_{k,n}}\right).$$

Viszont $1-\lambda_{k,n}+\lambda_{k,n}e^{it\lambda_{k,n}} = 1+\lambda_{k,n}\left(e^{it}-1\right) = \exp\left\{\lambda_{k,n}\left(e^{it}-1\right) + \alpha(k,n,t)\lambda_{k,n}^2)\right\}$ rögzitett t-re, ahol $|\alpha(k,n,t)| \le \text{const.}$, mely konstans függhet a t változótól, de nem függ n-től és k-tól, mert $1+x = e^x + \bar\alpha x^2$, ahol $\bar\alpha = \bar\alpha(x) \le \text{const.}$ egy olyan konstanssal, mely egyenletes, ha x egy rögzített véges intervallumban van. Ezt az aszimptotikát alkalmazzuk $x = \lambda_{k,n}\left(e^{it}-1\right)$ választással, és megjegyezzük, hogy $x \le \text{const.}\,\lambda_{k,n}$ rögzített t-re. E képleteket felhasználva kapjuk, hogy

$$Ee^{itS_n} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,n}\left(e^{it}-1\right) + \alpha(k,n,t)\lambda_{k,n}^2\right\} \to \exp\left\{-\lambda(e^{it}-1)\right\},$$

mert $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{k,n}\left(e^{it}-1\right)=\lambda(e^{it}-1)$, és

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha(k,n,t)\lambda_{k,n}^{2}\le\text{const.}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,n}^{2}\le\text{const.}\left(\sup_{1\le k\le n}\lambda_{k,n}\right)\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,n}\to 0,$$

ha $n\to\infty$. Ez viszont azt jelenti, hogy az S_n valószínűségi változó E^{itS_n} karakterisztikus függvénye konvergál a λ paraméterű Poisson eloszlás karakterisztikus függvényéhez, ha $n\to\infty$. Tehát igaz a megfogalmazott határeloszlástétel.

Megfogalmazzuk a fent bebizonyított állítás egy élesítését, mely hasonlóan bizonyítható. A bizonyítást azonban nem tárgyaljuk, hanem az nem kötelező házi feladat.

Legyen $\xi_{k,j}$, $j=1,\dots,n_k$ valószínűségi változók szériasorozata, melyek rögzített k-ra függetlenek. Tegyük fel ezenkívül azt, hogy

(i) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem-negatív egész értékeket vesznek fel, $P(\xi_{k,j}=1)=\lambda_{k,j}$, $P(\xi_{k,j}\ge 2)=o(\lambda_{k,j})$, $1\le j\le n_k$, és az $o(\cdot)$ egyenletes j-ben.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}=0$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}\to\lambda>0$

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy Poisson eloszlású valószínűségi változóhoz λ paraméterrel,

Egy másik házi feladat

Lássuk be a (karakterisztikus függvény módszer felhasználásaával), hogy ha ξ_λ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor a $\dfrac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz $\lambda\to\infty$ esetén.

Érdemes megjegyezni, hogy nem véletlen egybeesésről van szó, amikor azt látjuk, hogy mind az előző feladatban mind a centrális határeloszlástételben ugyanaz a limesz jelenik meg. Ugyanis abból, hogy független λ és μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók összege $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlás, következik, hogy nagy paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók előállíthatóak mint független (Poisson) eloszlású valószínűségi változók összegei.

Megfogalmazok néhány további házi feladatot, melyben néhány ismert eloszlás karakterisztikus függvényét kell kiszámítani.

Ha a ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $f(u)=\lambda e^{-\lambda u}$, ha $u\ge 0$, $f(u)=0$, ha $u<0$, akkor ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-it}$.

Ha a ξ valószínűségi változó negativ binomiális eloszlású $n = 1$ és p paraméterrel, $0 < p < 1$, azaz $P(\xi = k) = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \dfrac{1-p}{1-pe^{it}}$.

A következő feladat az előbbi állítás általánosítása. Ennek bizonyításához jobban kell érteni a negatív binomiális eloszlás valószínűségi tartalmát, ezért ez nem kötelező házi feladat.

Ha a ξ valószínűségi változó negativ binomiális eloszlású n és p paraméterrel, ahol $n \geq 1$ egész szám, $0 < p < 1$, azaz $P(\xi = k) = \binom{n+k-1}{k} p^k(1-p)^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \left(\dfrac{1-p}{1-pe^{it}}\right)^n$.

Érdemes külön tárgyalni az úgynevezett Cauchy eloszlást. Ennek sűrűségfüggvénye, $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$. Be lehet látni, hogy ennek karakterisztikus függvénye $\displaystyle\int \frac{e^{itx}}{\pi(1+x^2)}\,dx = e^{-|t|}$. Ennek az integrálnak a kiszámolása nem triviális, bizonyos komplex függvénytani ismereteket (rezidium számítás) igényel, ezért még nem kötelező házi feladatként sem tárgyaljuk. Viszont érdemes észrevenni ennek a feladatnak a következő következményét: Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független Cauchy eloszlású valószínűségi változók sorozata, és tekintsük ezen $\eta_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ változók átlagát. Számítsuk ki η_n karakterisztikus függvényét. Egyszerű számolás adja, hogy η_n karakterisztikus függvénye $e^{-|t|}$, tehát az η_n átlag eloszlása megegyezik a ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, összedandók eloszlásával. Ez azt is jelenti, hogy ebben a példában nem teljesül a nagy számok törvénye. Megjegyzem, hogy a fenti eloszlásról szóló állítás direkt módon, sűrűségfüggvények konvoluciójának kiszámításával is bizonyítható, ez azonban igen fáradságos. Vegyük észre, hogy a sztochasztikus konvergencia szükséges és elégséges feltételét kimondó tétel feltételeit a Cauchy eloszlás nem teljesíti. Valóban, ha F jelöli a Cauchy eloszlás eloszlásfüggvényét, akkor

$$\lim_{x\to\infty} x[1 - F(x) + F(-x)] = \lim_{x\to\infty} 2x \int_x^\infty \frac{1}{\pi(1+u^2)}\,du = \frac{2}{\pi} > 0.$$

Valószínűségi változók összegének szorzatának a várható értéke.

Tekintsünk $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változókat egy $(\Omega, \mathcal{A}, R)$ valószínűségi mezőn. Mint azt már többször hivatkoztunk rá, ekkor $E(\xi_1 + \dots + \xi_k) = E\xi_1 + E\xi_2 + \dots + E\xi_k$. Továbbá, ha $\xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók, akkor $E\xi_1 \cdots \xi_k = E\xi_1 \cdots E\xi_k$. A bevezető előadásban szerepelt ez az eredmény abban a speciális esetben, ha a ξ_j, $j = 1, \dots, k$ valószínűség változók diszkrétek, azaz legfeljebb megszámlálható sok értéket vehetnek fel. Az általános eset visszavezethető erre az esetre alkalmas határátmenettel. Érdemes tárgyalni, hogyan lehet ezt a határátmenetet elvégezni. Felsoroljuk a legfontosabb eredményeket, melyek segítenek az ilyen határátmenet végrehajtásában. Ezek az úgynevezett Lebesgue (dominated convergence) tétel, a Beppo–Levy tétel és a Fatou lemma.

Lebesgue tétel. *Legyen f_n, $n = 1, 2, \dots$, mérhető függvények sorozata egy $(X, \mathcal{X}, \mu)$ mértéktéren. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban, és létezik olyan "domináns" g függvény az $(X, \mathcal{X}, \mu)$ téren, melyre $|f_n(x)| \le g(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban minden $n = 1, 2, \dots$, indexre, és $\int g(x)\, d\mu(x) < \infty$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f_0(x)\, d\mu(x)$.*

Beppo-Levy tétel. *Legyen f_n, $n = 1, 2, \dots$, mérhető függvények sorozata egy $(X, \mathcal{X}, \mu)$ mértéktéren. Tegyük fel, hogy az $f_n(x)$ sorozat monoton növekszik, azaz $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \cdots$ majdnem minden $x \in X$ pontban. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ az f_n függvények limesze. Tegyük fel, hogy teljesül az $\int f_1(x)\, d\mu(x) > -\infty$ feltétel. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f_0(x)\, d\mu(x)$. Ez úgy értendő, hogy amennyiben $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x) = \infty$, akkor $\int f_0(x)\, d\mu(x) = \infty$.*

Fatou lemma. *Legyen f_n, $n = 1, 2, \dots$, mérhető függvények sorozata egy $(X, \mathcal{X}, \mu)$ mértéktéren. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban, és létezik olyan "alsó korlát" g függvény az $(X, \mathcal{X}, \mu)$ téren, melyre $f_n(x) \ge g(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és $\int g(x)\, d\mu(x) > -\infty$. Ekkor $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) \ge \int f_0(x)\, d\mu(x)$.*

A fenti tételekben szereplő feltételek jobb megértése érdekében tekintsük a következő példát. Legyen $(X, \mathcal{X}, \mu)$ a $(0, 1]$ intervallum, rajta a Borel σ-algebra, és Lebesgue mérték a μ mérték. Definiáljuk a következő $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, függvényeket ezen a téren. $f_n(x) = n$, ha $0 < x \le \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$, ha $\frac{1}{n} \le x \le 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ minden $x \in (0, 1]$ pontban, ahol $f_0(x) \equiv 0$. Ekkor $\int f_n(x)\, d\mu(x) = 1$ minden $n = 1, 2, \dots$, számra, és $\int f_0(x)\, d\mu(x) = 0$. Ekkor a Lebesgue tétel és a Beppo–Levy tétel nem feltételei teljesülnek, a Fatou lemma feltételei pedig teljesülnek.

Legyen $f_n(x) = -\frac{1}{x}$, ha $0 < x \le \frac{1}{n}$, és $f_n(x) = 0$, ha $\frac{1}{n} < x \le 1$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor ez egy monoton függvénysorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$, $f_0(x) \equiv 0$. Ekkor $\int f_n(x)\, dx = -\infty$ minden $n = 1, 2, \dots$, számra, és $\int f_0(x)\, dx = 0$. Ekkor a Beppo–Levy tételben szereplő feltételek közül az $\int f_0(x)\, d\mu(x) > 0$ nem teljesül.

Lássuk be, hogy független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke megegyezik a várható értékek szorzatával. Tekintsük először azt az esetet, amikor mindegyik ξ_j, $1 \le j \le k$, valószínűségi változó pozítiv. Minden $n = 1, 2, \dots$, számra tekintsük ezeknek a valószínűségi változóknak következő diszkretizáltjait.

$$\xi_j^{(n)}(\omega) = p2^{-n}, \quad \text{ha } p2^{-n} \le \xi_j(\omega) < (p+1)2^{-n}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \; n = 1, 2, \dots,$$

minden $1 \le j \le k$ indexre. Ekkor egyrészt $E\xi_1^{(n)} \cdots \xi_k^{(n)} = E\xi_1^{(n)} \cdots E\xi_k^{(n)}$, mert diszkrét valószínűségi változókra tudjuk az állítást. Másrészt a $\xi_j^{(n)}$ valószínűségi változók rögzített j-re az n paraméter monoton függvényei, és ugyanez igaz a szorzatukra is. Ezért a Beppo–Levy tétel lehetővé teszi a határátmenet elvégzését, ahonnan kapjuk az állítást nem negatív valószínűségi változók esetén. Az általános eset erre könnyen visszavezethető erre az esetre a $\xi_j = \xi_j^+ - \xi_j^-$, $1 \le j \le k$, $\xi_j^+(\omega) = \max(\xi_j(\omega), 0)$, $\xi_j^-(\omega) = -\min(\xi_j(\omega), 0)$ felbontás segítségével. Érdemes megjegyezni, hogy elég csak a $E|\xi_j| < \infty$ feltételeket feltenni ahhoz, hogy a szorzat abszolut értékének a várható értéke véges legyen.

Centrális határeloszlástétel.

A centrális határeloszlástétel független és nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók összegére is igaz, ha ezek a valószínűségi változók teljesítenek alkalmas feltételeket. A bizonyítás gondolata a következő: Legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók sorozata, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $s_n^2 = \sum\limits_{k=1}^n \sigma_k^2$. Azt akarjuk belátni, hogy az $\dfrac{S_n}{s_n}$ valószínűségi változóknak van határeloszlása. Jegyezzük meg, hogy a tekintett normalizálás a természetes, mert $E\dfrac{S_n}{s_n} = 0$ és $E\left(\dfrac{S_n}{s_n}\right)^2 = 1$. Azt kell belátnunk, hogy az $\varphi_n(t) = Ee^{itS_n/s_n}$ karakterisztikus függvények konvergálnak egy az origóban folytonos $\psi(t)$ függvényhez. Viszont $\varphi_n(t) = Ee^{itS_n/s_n} = \prod\limits_{k=1}^n Ee^{it\xi_k/s_n}$. E szorzat aszimptotikájának vizsgálatához az egyes tényezők jó aszimptotikájának ismeretére van szükségünk. Az érdekes, minket érdeklő esetekben $s_n \to \infty$, ha $n \to \infty$. Ekkor a $\dfrac{t}{s_n}$ argumentumok kicsik, ezért természetes azt várni, hogy az $\rho_k(t) = Ee^{it\xi_k/s_n}$ tagokra jó aszimptotikát ad a Taylor sorfejtés. Az origóban vett deriváltakat ki tudjuk fejezni a a ξ_k valószínűségi változó momentumaival. Azt kapjuk, hogy $Ee^{it\xi_k/s_n} = 1 + 0 \cdot t - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2s_n^2} +$ elhanyagolható hiba $= e^{-\sigma^2 t^2/2s_n^2 + \text{elhanyagolható hiba}}$, mert $\log(1 + x) \sim x$ kis x számokra. Ezeket összeszorozva $\varphi_n(t) = Ee^{itS_n/s_n} = \prod\limits_{k=1}^n Ee^{it\xi_k/s_n} \sim e^{-(\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)/2s_n^2} = e^{-t^2/2}$. Ha a fenti számolást el tudjuk végezni, azaz az előforduló hibák elhanyagolhatóak, akkor megkapjuk a kívánt eredményt.