

Az október 19-i szeminárium témája

Rövid összefoglaló

Először megtárgyaltuk az első kitűzött feladat megoldását (lásd október 12-i gyakorlat 6. oldala) és a következő feladatot tűztem ki.

Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 10 alkalommal. Kiszámítjuk a 10 dobás eredményének az összegét. Mi ezen véletlen összeg négyzetének a várható értéke?

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n egész értékű valószínűségi változók, melyek tetszőleges k_1, \dots, k_n egész számokra, és az $1, \dots, n$ tetszőleges permutációjára teljesítik a

$$P(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) = P(\xi_{\pi(1)} = k_1, \dots, \xi_{\pi(n)} = k_n)$$

azonosságot. Ekkor tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokra a (ξ_1, ξ_2) illetve (ξ_i, ξ_j) vektorok eloszlása megegyezik. Ezért $E\xi_i\xi_j = E\xi_1\xi_2$, $E\xi_1 = E\xi_j$.

Egy valószínűségű, sztochasztikus és eloszlásban való konvergencia

Az előbb felsorolt konvergenciafogalmak a legfontosabbak a valószínűségszámításban. Ezért idézzük fel e fogalmak definícióit, és beszéljük meg azok kapcsolatát, legfontosabb tulajdonságait. Megjegyezzük, hogy az egy valószínűségű konvergenciát majdnem mindenütt való a sztochasztikus konvergenciát pedig mértékben való konvergenciának is hívják.

Az egy valószínűségű konvergencia definíciója: *Valószínűségi változók ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt)*

$$P\left(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

A sztochasztikus konvergencia definíciója: *Valószínűségi változók ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál sztochasztikusan egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt) minden $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

Az eloszlásban való konvergencia definíciója: *Valószínűségi változók ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez vagy az ezen eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n < u) = F(u)$ minden olyan u számra, ahol az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény függvény folytonos. (Azt mondjuk, hogy a ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy ξ valószínűségi*

változóhoz, ha ez a sorozat eloszlásban konvergál az $F(u) = P(\xi < u)$ eloszlásfüggvényhez.)

Eloszlásfüggvények $F_n(u)$ sorozata akkor és csak akkor konvergál egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha valószínűségi változók olyan $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, sorozata, melyekre ξ_n eloszlása $F_n(u)$ eloszlásban konvergálnak az $F(u)$ eloszlásfüggvényhez. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = F(u)$ az $F(\cdot)$ függvény minden folytonossági pontjában.

A továbbiakban tárgyalni fogjuk

- a.) A különböző konvergenciafogalmak közötti kapcsolatot.
- b.) Az eloszlásban való konvergencia pontosabb tartalmát. Külön tárgyaljuk azt, hogy miért csak az $F(\cdot)$ határeloszlás folytonossági pontjaiban követeljük meg a $P(\xi_n < u) \rightarrow F(u)$ konvergenciát.

Igaz a következő kapcsolat: Egy valószínűségi konvergencia \Rightarrow Sztochasztikus konvergencia \Rightarrow Eloszlásban való konvergencia.

Valóban, ha $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$ egy valószínűséggel, akkor definiálva az $A_n = A_n(\varepsilon) = \left\{ \omega : \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon \right\}$ halmazokat kapjuk, hogy az egymásba skatulyázott A_n halmazokra, (azaz $A_1(\omega) \subset A_2 \subset \dots$), $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$. Ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1$. Mivel $\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} \supset A_n$, $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon) \rightarrow 1$, azaz $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ez azt jelenti, hogy az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Nem kötelező házi feladat:

Valószínűségi változók $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi

változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0.$$

Lássunk példát arra, hogy lehetséges olyan $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, és ξ valószínűségi változókat konstruálni, melyekre a $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan tart ξ -hez, de a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Tekintsük a következő (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőt: Ω a $[0, 1]$ intervallum, \mathcal{A} a Borel mérhető halmazok σ -algebrája a $[0, 1]$ intervallumon, a P valószínűségi mérték a Lebesgue mérték. Legyen

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [(n - 2^k)2^{-k}, (n + 1 - 2^k)2^{-k}] \\ 0 & \text{ha } x \notin [(n - 2^k)2^{-k}, (n + 1 - 2^k)2^{-k}] \end{cases}$$

akkor ha $2^k \leq n < 2^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$,

és $\xi(x) = 0$ minden $0 \leq x \leq 1$ számra. Ekkor $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 2^{-k}$ minden $\varepsilon > 0$ számra, ha $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Tehát a $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, sorozat sztochasztikusan konvergál

a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont mivel $\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(x) = 0$ minden $0 \leq x \leq 1$ számra, ezért a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Másrészt a Borel-Cantelli lemmából következik, hogy amennyiben minden $\varepsilon > 0$ számra $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$, akkor a ξ_n sorozat egy valószínűséggel konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Miért?

Ez a megjegyzés azt mutatja, hogy ha a $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$ valószínűség minden rögzített $\varepsilon > 0$ számra olyan kicsi, hogy nemcsak nullához tart, hanem az ezekből a valószínűségek közül, $n = 1, 2, \dots$, készített összeg konvergens, akkor a ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergálnak a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont lehetséges, hogy valószínűségi változók ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata egy valószínűséggel tart nullához, noha a $P(|\xi_n| > \frac{1}{2})$ valószínűségek lassan tartanak nullához. Példa: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$, ahol \mathcal{A} , a Borel mérhető halmazok σ -algebrája a $[0, 1]$ intervallumon, és λ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a $\xi_n(x)$ valószínűségi változókat a következőképpen: $\xi_n(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, és $\xi_n(x) = 0$, ha $\frac{1}{n} < x \leq 1$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(x) = 1$ minden $0 < x \leq 1$ esetében. Viszont $\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n > \frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Sőt a fenti példát tudjuk élesíteni. Hasonló példát kapunk, ha a ξ_n valószínűségi változót úgy definiáljuk, mint a $[0, \varepsilon_n]$ intervallum indikátorfüggvényét, ahol ε_n , $n = 1, 2, \dots$, tetszőleges nullához tartó sorozat.

A fenti példa mutatja, hogy a Borel-Cantelli lemmában a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ feltétel nem elegendő ahhoz, hogy egy valószínűséggel végtelen sok A_n esemény következzen be. Az ok a tekintett példában az, hogy a különböző A_n események majdnem ugyanazt a halmazt fedik le, így lehetnek olyan $\omega \in \Omega$ elemi események, melyekre azon n indexek, melyekre $\omega \in A_n$ sűrűen vannak, míg más $\omega \in \Omega$ elemi eseményeket ritkán fednek le az A_n események. Megjegyzem, hogy az A_n események függetlensége a Borel-Cantelli lemmában arra szolgál, hogy érvényes legyen egyfajta nagy számok törvénye, az A_n halmazok egyenletesen fedjék le az Ω halmazt.

Láttuk, hogy lehetséges az, hogy valószínűségi változók sztochasztikusan konvergáljanak, de egy valószínűséggel nem. Felmerülhet a kérdés, lehetséges-e az, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegei teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, de nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. A válasz igen, de ennek bizonyítása jóval nehezebb, mint az eddig tárgyalt állításoké. Az általános elméletben meg tudják adni mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének szükséges és elégséges feltételét, és ezek összehasonlítása segít a feladat megoldásában. Bár bizonyos fontos részletek bizonyítását nem kötelező házi feladatnak fogunk tekinteni, meg fogunk adni egy példát arra, mely olyan példát mutat, amelyikben a nagy számok gyenge törvényét teljesíti, de a nagy számok erős törvényét nem. Először idézzük fel a következő eredményt.

Tétel. Jelölje egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(u)$, sűrűségfüggvényét pedig (amennyiben ez létezik) $f(u)$. Legyen $g(u)$ mérhető függvény a számegyenesen,

melyre $g(\xi)$ integrálható, azaz $E|g(\xi)| < \infty$. Ekkor

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF(u) \quad \left(= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u) du \right).$$

Továbbá az $E|g(\xi)| < \infty$ állítás akkor és csak akkor érvényes, ha $\int |g(u)| dF(u) < \infty$. A zárójelben megfogalmazott reláció akkor érvényes, ha a ξ valószínűségi változó eloszlásának létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye. Speciálisan,

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u dF(u) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u) du.$$

Lássuk be ennek az eredménynek a segítségével azt, hogy $E|\xi| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n) < \infty$.

$E|\xi| < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\int |u| dF(u) < \infty$, és ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\sum_{n=0}^{\infty} nP(n < |\xi| \leq n+1) < \infty$. (Miért?) Ezt az összeget átrendezve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nP(n < |\xi| \leq n+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(P(|\xi| > n) - P(|\xi| > n+1)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n)[n - (n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| > n) \end{aligned}$$

Innen következik az állítás.

Feladat. (Nem kötelező)

A ξ valószínűségi változónak akkor és csak akkor létezik véges második momentuma, ha $\sum_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$. Általánosabban $E|\xi|^k < \infty$ valamilyen $k =$

$1, 2, \dots$, számra akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}P(|\xi| > n) < \infty$.

Belátjuk az előző eredmény és a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy ha a ξ_1, ξ_2, \dots , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata olyan, hogy $E|\xi_1| = \infty$, akkor az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat egy valószínűséggel divergens, ahol $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Tehát ebben az esetben nem teljesül a nagy számok erős törvénye.

Vegyük észre, hogy amennyiben $E|\xi_1| = \infty$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi_1| > n) = \infty$, az $\{\omega: |\xi_n(\omega)| > n\}$ események függetlenek, ezért a Borel–Cantelli lemma szerint majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén $|\xi_n(\omega)| > n$ végtelen sok n indexre.

Ha $\omega \in \Omega$ olyan pont, melyben az $\frac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat konvergens, akkor ebben az ω pontban $\sup_{1 \leq n < \infty} \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| < K(\omega)$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \frac{S_n(\omega)}{n} \right) = 0$. Viszont, $\frac{S_{n+1}(\omega)}{n+1} - \frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{\xi_{n+1}(\omega)}{n+1} + \frac{S_n(\omega)}{n(n+1)}$, és $\frac{S_n(\omega)}{n(n+1)} \rightarrow 0$. Innen következik, hogy $|\xi_{n+1}(\omega)| < n+1$ minden $n \geq n_0(\omega)$ számra alkalmas $n_0(\omega)$ küszöbindex-szel, ha az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat konvergál. Ez viszont csak nulla valószínűségű $\omega \in \Omega$ halmazra érvényes. Megjegyezzük bizonyítás nélkül, hogy érvényes ennek az állításnak a megfordítása is, nevezetesen a következő tétel.

Tétel. Legyen ξ_1, ξ_2, \dots , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Az $\frac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat akkor és csak akkor konvergál pozitív valószínűséggel, ha $E|\xi_1| < \infty$. Ha $E|\xi_1| < \infty$, akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E\xi_1 \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega\text{-ra.}$$