Az október 5-i szeminárium témája
Rövid összefoglaló

A szeminárium témája a következő feladatok, illetve azok vizsgálata során felmerülő valószínűségszámítási és mértékelméleti kérdések megtárgyalása volt.

1. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk egymás után. Addig folytatjuk a pénz feldobását, amig ötödször jelenik meg a dobás eredményeként fej. Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó dobást kettővel megelőző dobás eredménye fej?
   a.) Mi az előző esemény feltételes valószínűsége azon feltétel mellett, hogy a dobássorozat 20 dobásból áll?
2. Egy pénzdarabot feldobunk egymás után úgy, hogy először feldobjuk százszor, majd egymás után addig míg elóször megjelenik egy fej dobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsó előtti dobás eredménye fej?

Az első feladat vizsgálatában lássuk be először azt az állítást, hogy egy valószínűséggel véges sok lépésen belül egy valószínűséggel bekövetkezik az, hogy megjelenik öt fej-dobás, azaz a dobássorozatot egy valószínűséggel befejezzük. Viszont nem lehet rögzíteni olyan véges számot úgy, hogy ennyi lépésen belül biztosan megjelenik öt fej-dobás. Megtárgyaltuk, hogy ha tekintünk egy végtelen fej-írás dobás sorozatot, és veszük az egymás után következő öt hosszúságú blokkokat, akkor annak valószínűsége, hogy az első n blokkban megjelenik egy öt hosszúságú fej sorozat az $1-\left(1-\frac{1}{32}\right)^n$ számmal egyenlő, és ez a mennyiség tart egyhez, ha $n\to\infty$. Innen következik, hogy valóban egy valószínűséggel bekövetkezik véges sok lépésen belül öt fej dobás. Az, hogy ez nem következhet be rögzített számú lépésen belül látható onnan, hogy n lépésen belül 2^{-n} valószínűséggel csupa írás lesz a dobás végeredménye.

Valójában, az előző gondolatmenet hallgatólagosan felhasználta a mértékelmélet illetve az előadáson szereplő tananyag egyik fontos, de korántsem könnyű eredményét. Nevezetesen azt, hogy beszélhetünk a valószínűségszámításnak az előadáson ismertetett modelljében szabályos pénzdarabok független *végtelen* fej-írás sorozatáról. Ez az eredmény ekvivalens a következő állítással: Lehetséges megadni egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt, és azon definiálni független valószínűségi változók olyan $\xi_1,\xi_2,\dots,$ sorozatát, mely sorozat elemeire $P(\xi_n=0)=P(\xi_n=1)=\frac{1}{2}$. (Valóban, definiáljuk a ξ_n, $n=1,2,\dots$ valószínűségi változót úgy, hogy $\xi_n=1$, ha az n-ik dobás eredménye fej, és $\xi_n=0$, ha az n-ik dobás eredménye írás. Ez a definició megmutatja,hogy a fenti két probléma ekvivalens.) Megadjuk bizonyítás nélkül egy valószínűségi mezőnek és rajta a kívánt tulajdonságú valószínűségi változók sorozatának konstrukcióját.

Egy természetes konstrukció a következő: Legyenek az elemi események a végtelen fej-írás sorozatok, tehát egy elemi esemény egy $\omega=(F,F,I,\dots)$ sorozat, ahol mindegyik koordináta vagy F vagy I. Legyen Ω az összes lehetséges végtelen fej–írás sorozatok halmaza. A következő lépés a mérhető halmazok $\mathcal{A}$ σ-algebrájának a definiciója. Ezt a következő módon tesszük: Rögzítsünk egy tetszőleges n pozitív egész számot és egy n hosszúságú fej–írás sorozatot. Definiáljuk azt a végtelen fej–írás sorozatokból álló halmazt, melynek első n jele ez az n hosszúságú fej-írás sorozat. Az ilyen halmazok elemei az $\mathcal{A}$ σ-algebrának, és az $\mathcal{A}$ σ-algebrát úgy definiáljuk, mint a legszűkebb ilyen tipusú halmazokat tartalmazó σ-algebrát. Be lehet látni (és a bizonyítás egyszerű), hogy ez a definició értelmes, azaz létezik az előbbi halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebra. Jegyezzük meg, hogy ez a definició csak implicit módon definiálja az $\mathcal{A}$ σ-algebrát. Másrészt ez a σ-algebra nem tartalmazza az Ω halmaz összes lehetséges részhalmazát. Ez mutatja a különbséget a véges és végtelen sorozatokat tartalmazó valószínűségi mezők közöttt.

Végül definiálnunk kell a P valószínűségi mértéket az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ezt úgy definiáljuk, hogy egy olyan halmaznak, mely az összes olyan sorozatokból áll, melynek első n jegye előírt fej vagy írás a további jegyek pedig tetszőlegesek a valószínűsége 2^{-n}. Be lehet látni, hogy létezik *egyetlen* olyan valószínűségi mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, mely az előbbi halmazfüggvény kiterjesztése. Az, hogy ez valóban így van a mértékelmélet mély eredményeiből következik. Megjegyezzük, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőnek ez a kissé komplikáltnak tűnő definiciója azért szükséges, mert nem tudnánk az előző speciális halmazokon definiált halmazfüggvényt kiterjeszteni egy (σ-additív) valószínűségi mértékké Ω összes lehetséges részhalmazára. Viszont ahhoz, hogy jól tudjunk számolni egy valószínűségi problémában szükséges feltenni, hogy a valószínűségi mérték σ-additív. Másrészt az, hogy csak a fent definiált $\mathcal{A}$ σ-algebrát tekintjük, csak az ebben a σ-algebrában levő halmazoknak beszélünk valószínűségéről nem jelent kellemetlen megszorítást. Ugyanis minden természetes, "definiálható" halmaz eleme ennek a σ-algebrának.

A kívánt tulajdonságú, független ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat, melyekre $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$ egyszerűen definiálhatjuk ezen a valószínűségi mezőn. Ha az $\omega = (F, F, I, \dots)$ sorozat n-ik jele F, akkor legyen $\xi_n(\omega) = 1$, ha pedig I akkor legyen $\xi_n(\omega) = 0$.

Az előbb tárgyalt probléma egy másik lehetséges megoldását adja a következő feladat megoldása, melyet nem kötelező házi feladatként kitűztem:

> Definiáljuk az $\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt a következő módon: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ a $[0, 1)$ intervallum Borel mérhető részhalmazainak a σ-algebrája, P a Lebesgue mérték, azaz $P([a, b)) = b - a$, ha $0 \le a < b < 1$. Adva egy $x \in [0, 1)$ pont (azaz elemi esemény), írjuk fel ezt a számot $x = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \cdots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$ végtelen "kettedes"-tört alakban, ahol $\varepsilon_k = 0$ vagy $\varepsilon_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$. (Az egyértelmű felírás érdekében abban az esetben, ha egy számot kétféleképpen írhatunk fel, a sorozat végén vagy csupa 0-val vagy csupa 1-gyel, akkor írjuk fel ezt a számot a végén csupa egyessel.) Definiáljuk a $\xi_n = \xi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat a következő módon. Legyen $\xi_n(x) = 0$, ha az $x = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \dots$ "kettedes-tört" n-ik számjegye 0, $\xi_n(x) = 1$, ha ez a számjegy 1. Lássuk be, hogy ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók, és $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = 0) = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: Annak, hogy a végtelen szabályos fej-írás sorozatok létezését a fenti feladat segítségével látjuk be az a szépséghibája, hogy a felhasznált módszer csak ebben a speciális esetben működik. Másrészt ez a kérdés része egy sokkal általánosabb problémának, nevezetesen annak a kérdésnek, hogy lehet-e konstruálni végtelen sok valószínűségi változót előírt (véges dimenziós) eloszlásokkal alkalmas valószínűségi mezőn. Megjegyezzük, hogy a valószínűségszámítás egyik eredménye, melyet a valószínűségszámítás alaptételének neveznek informálisan úgy interpretálható, hogy minden értelmes esetben lehetséges ilyen konstrukció.

Az 1a.) feladat megoldása egyszerű. Definiáljunk egy A eseményt mint azt az eseményt, hogy a 20. dobás eredménye az ötodik fej dobás, azaz a 20. dobás eredménye fej, az első 19 dobás között pedig pontosan 4 darab fej dobás van, a B eseményt pedig mint azt az eseményt, hogy a 18. dobás eredménye fej. Ekkor a $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ kifejezést kell kiszámítani. Viszont $P(AB)=\dbinom{18}{3}2^{-20}$, mert annak az eseménynek a valószínűségét kell kiszámolnunk, hogy a 18. és 20. dobás eredménye fej, az első húsz dobás maradék 18 helyen 3 fej és 15 írás dobás eredmény fordul elő. Hasonló érveléssel látható, hogy $P(A)=\dbinom{19}{4}2^{-20}$.

Az 1. feladat megoldása hasonlóan számolható. Az ebben a feladatban kiszámítandó valószínűség kifejezhető mint

$$\sum_{n=5}^{\infty} P(\text{az } n\text{-ik és } n-2\text{-ik dobás eredménye fej, az első } n \text{ dobásban}$$
$$\text{pontosan 5 fej fordul elő}) = \sum_{n=5}^{\infty} P(A_n).$$

Könnyen látható, hogy $P(A_n)=\dbinom{n-2}{3}2^{-n}$. Innen kiszámítható a kívánt valószínűség. Viszont egyszerűbb ennek a valószínűségnek a kiszámítása, ha észrevesszük hogy annak a valószínűségét, hogy az első dobás eredménye fej, megegyezik a fenti összeggel, mert

$$P(\text{az első dobás eredménye fej})$$
$$= \sum_{n=5}^{\infty} P(\text{az első dobás eredménye fej, az } n\text{-ik dobásban jelenik meg az ötödik fej}).$$

Másrészt ennek az azonosságnak a jobboldalán szereplő valószínűségek értéke megegyezik az előző proobléma vizsgálatában bevezetett $P(A_n)$ számokkal. Tehát az 1. feladatban vizsgált esemény valószínűsége $\frac{1}{2}$.

A második feladat megoldása: A kiszámítandó esemény azt jelenti, hogy a 100. és 101. dobás eredménye fej, így ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$.

Az előző két példában egy szabályos pénzdarab dobás sorozat véletlenül kiválasztott tagját tekintettük, és kiszámoltuk annak a valószínűségét, hogy ennek a dobásnak az eredménye fej. Az első esetben ez a valószínűség megegyezett annak a valószínűségével, hogy az n-ik dobás eredménye fej, ahol n fix szám, a második esetben az eredmény különbözött attól. A következő állítás bizonyítása házi feladat.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ olyan független valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \dfrac{1}{2}$. Legyen továbbá τ a ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, amelyik pozitív egész értékeket vesz fel. Lássuk be, hogy a véletlen indexű ξ_τ valószínűségi változó teljesíti a $P(\xi_\tau = 0) = P(\xi_\tau = 1) = \frac{1}{2}$ relációt.

További kitűzött, de nem kötelező házi feladat az első feladat algebrai megoldása, azaz a valószínűséget kifejező összeg direkt, nem valószínűségi meggondolásokon alapuló kiszámolása.