A szeptember 14-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

A szeminárium fő célja az volt, hogy néhány feladat megtárgyalásával példát mutassunk arra, hogy a valószínűségi mezők "absztrakt fogalmának" felhasználása lehetővé teszi bizonyos feladatok egyszerű megoldását, heurisztikus érvelések egyszerű, precíz megfogalmazását. A későbbiekben is igyekszünk ilyen példákat vizsgálni.

Az első vizsgált kérdés a következő volt:

Legyen egy urnában 70 piros és 30 fehér golyó. Húzzuk ki a golyókat visszatevés nélkül.

a.) Mi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott golyó színe piros, a másodiké pedig fehér?

b.) Mi a valószínűsége annak, hogy a 13. kihúzott golyó színe piros, a 29. kihúzott golyó színe pedig fehér?

Számunkra a feladat b.) része volt érdekes. Elhangzott az a heurisztikus érv, hogy az a.) és b.) kérdésre ugyanaz a válasz. E (helyes) heurisztikus érv indoklása érdekében megfogalmaztuk a feladatot formálisan egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező bevezetésével.

A következő modellt definiáltuk: Tekintsük az összes $\omega = (F, P, F, F, \dots)$ száz hosszúságú 30 F (fehér) és 70 P (piros) jelből álló sorozatot. Legyen Ω az összes ilyen ω sorozatól álló halmaz, $\mathcal{A}$ a (mérhető) halmazok rendszere (σ-algebrája) Ω összes részhalmaza, azaz minden lehetséges fent definiált ω (elemi eseményekből) álló halmaz. Legyen minden ω elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{\binom{100}{30}}$. Egy A halmaz valószínűsége pedig az A halmaz által tartalmazott elemi események valószínűségének összege. Ebben a modellben az a.) feladat valószínűsége azon A esemény valószínűsége, mely azokat az ω sorozatokat tartalmazza, melyek első eleme P második eleme pedig F. A b.) feladatban annak a B eseménynek a valószínűségét vizsgáljuk, melyek olyan ω sorozatokat tekint, melyek 13. jele P 29. jele pedig F. Beláttuk természetes megfeleltetéssel, hogy $P(A) = P(B)$.

Valójában a fenti tárgyalás nem teljesen kielégítő. Látnunk kell ugyanis, hogy nincs jelentősége annak, hogy a minket érdeklő valószínűségeket milyen a feltételeket kielégítő modellben tekintjük. Ezért érdemes a fenti gondolatmenetet úgy módosítani, hogy az érvelés ne függjön attól, hogy milyen modellt tekintünk.

Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, mely tartalmazza az összes olyan eseményt, hogy egy húzássorozat eredménye valamilyen $(F, P, F, F, \dots)$ száz hosszúságú 30 F (fehér) és 70 P (piros) jelből álló sorozat. (Nem tesszük fel, hogy ezek az események elemi események.) Minden ilyen esemény valószínűsége legyen $\frac{1}{\binom{100}{30}}$. Vegyük észre, hogy ilyen módon a valószínűségi mező egy partícióját kapjuk. (Diszjunkt eseményeket definiáltunk, melyek összvalószínűsége 1.) Definiáljuk a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. (Azaz, ha az előbb definiált partició olyan sorozatot tartalmaz, melynek j-ik jele P illetve F.) Ekkor a minket érdeklő kérdés a $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)$ (a.) feladat), illetve a $P(\xi_{13} = 1, \xi_{29} = 0)$ valószínűség (b.) feladat) kiszámítása.

Be lehet látni, hogy a fenti jelölésekkel

$$P(\xi_1 = \varepsilon_1, \xi_2 = \varepsilon_2, \dots, \xi_{100} = \varepsilon_{100}) = P(\xi_{\pi(1)} = \varepsilon_1, \xi_{\pi(2)} = \varepsilon_2, \dots, \xi_{\pi(100)} = \varepsilon_{100}),$$

ahol $(\pi(1), \dots \pi(100))$ az $(1, \dots, 100)$ számok tetszőleges permutációja, ε_j, $1 \le j \le 100$ vagy nullla vagy egy. Ez az azonosság lehetővé teszi annak bizonyítását, hogy az a) és b) feladatban szereplő valószínűségek megegyeznek.

További tárgyalt feladatok:

1.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek

  a.) Várható értékét,

  b.) Szórásnégyzetét.

  A feladat jobb megértése érdekében definiáljunk egy valószínűségi mezőt és rajta valószínűségi változókat, melyek segítségével ezt a feladatot precizen meg lehet fogalmazni.

2.) Legyen egy urnában 70 piros és 30 fehér golyó. Húzzuk ki a golyókat visszatevés nélkül. Számítsuk ki az első 10 húzásban kihízott piros golyók számának

  a.) Várható értékét,

  b.) Szórásnégyzetét.

Az előbbi feladatokban szereplő várható értéket és szórást kiszámíthatnánk a várható érték és szórásnégyzet definiciójának segítségével. Ez azonban nagyon fáradságos lenne. Ehelyett egyszerűbben eredményre jutunk a következő módon:

Az első feladat a megfelelő valószínűségi modell kidolgozása után a következő módon fogalmazható át. Legyen $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók sorozata, melyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E \sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$, $D^2 \sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} D^2\eta_j$. A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.

Hasonlóan tárgyalható a második feladat. Ekkor megfelelő modellben a vizsgált feladat az $E \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ és $D^2 \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ kiszámítása, ahol $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor $E \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j = \sum\limits_{j=1}^{20} E\xi_j$. A szórásnégyzet kiszámítása kissé bonyolultabb, mert a tekintett valószínűségi változók nem függetlenek. Viszont, mint megtárgyaltuk

$$D^2 \sum_{j=1}^{20} \xi_j = \sum_{j=1}^{20} D^2 \xi_j + \sum_{1 \le j < k < 20}^{20} (E\xi_j \xi_k - E\xi_j E\xi_k).$$

Továbbá, mint beláttuk $D^2\xi_j = D^2\xi_1$ minden $1 \le j \le 20$ és $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$ minden $1 \le j < k \le 20$ számra.

Ezenkívül annak érdekében, hogy megértsük miért fontos fogalom a várható érték és szórás a valószínűségszámításban felidéztük a centrális határeloszlástétel megfogalmazását.