A MÁJUS 7.-I DOLGOZAT FELADATAI

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$ és $\lambda \neq \mu$. Számítsa ki a $\xi+\eta$ összeg sűrűségfüggvényét.

2.) Legyen a (ξ, η) kétdimenziós véletlen vektor eloszlása egyenletes a $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ csúcspontok által meghatározott derékszögű háromszögben, azaz legyen sűrűségfüggvénye az $f(x,y) = 1$ az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 2$ egyenlőtlenséget teljesítő (x,y) pontokban, és $f(x,y) = 0$ egyébként. Számolja ki a ξ és η valószínűségi változók $\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$ kovarianciáját.

3.) Legyen $W(t)$, $0 \leq t \leq 1$, Wiener folyamat. Definiáljuk a $\bar{W}(t) = tW(\frac{1}{t})$, $t \geq 1$, sztochasztikus folyamatot. Lássa be, hogy $\bar{W}(t)$, $t \geq 1$, szintén Wiener folyamat.

4.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_{10000}$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{4}$, $P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$, és definiáljuk az $S = \sum\limits_{j=1}^{10000} \xi_j$ és $T = \sum\limits_{j=1}^{10000} \xi_j^2$ véletlen összegeket. Adjunk egy normális eloszlásfüggvény táblázat segítségével jó közelítő értéket a $P(S > 100, T > 5100)$ valószínűségre.

5.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor. Jelölje S_{100} e dobássorozat egymást követő három dobásból álló és csak fejdobást tartalmazó részsorozatainak a számát. Számolja ki az S_{100} valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

6.) Mi a többváltozós normális eloszlás definiciója?

MEGOLDÁSOK.

1. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-y)\,du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x - u < 0$, azaz $u \geq x$. Innen

$$f * g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\,du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\,du, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f * g(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \left[e^{-(\lambda-\mu)u} \right]_0^x = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \quad \text{ha } x \geq 0 \text{ és } \lambda \neq \mu.$$

2.) $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, $E\xi\eta = \int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi = \int xf(x,y)\,dx\,dy$ és $E\eta =$

$\int yf(x,y)\,dx\,dy$.

$$E\xi\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 x\left(\int_0^1 f(x,y)y\,dy\right)dx$$
$$= \int_0^2 x\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)dx = \int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 x\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}{2}\,dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2} - \frac{8}{6} + 2 = \frac{1}{6},$$
$$E\xi = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} x\,dy\right)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3},$$

$$E\eta = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}} dx$$
$$= \int_0^2 \frac{1-x+\frac{x^2}{4}}{2}\,dx = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}.$$

Innen, $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{18}$.

3.) A $\bar W(t) = tW(\frac{1}{t})$, $t \ge 1$ szintén Gauss folyamat, $E\bar W(t) = 0$ minden $t \ge 1$ számra, továbbá a trajektóriái folytonosak. Ezért elég ellenőrizni, hogy az $E\bar W(s)\bar W(t) = \min(s,t)$ azonosság teljesül. De $E\bar W(s)\bar W(t) = st\min(\frac{1}{s},\frac{1}{t}) = \min(t,s)$.

4.) Tekintsük a független $(\xi_i,\eta_i) = (\xi_i,\xi_i^2)$, $1 \le i \le 10000$, valószínűségi változókat. Ekkor $(S,T) = \left(\sum\limits_{i=1}^{10000}\xi_i, \sum\limits_{i=1}^{10000}\eta_i\right)$, és a $P(S > 100, T > 5100)$ valószínűséget kiszámíthatjuk közelítőleg a többváltozós centrális határeloszlástétel segítségével. Vegyük észre, hogy $ES = 0$, $ET = 10000E\xi_1^2 = 5000$, $\mathrm{Var}\,S = 10000(E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2) = 5000$, és $\mathrm{Var}\,T = 10000(E\xi_1^4 - (E\xi_1^2)^2) = 10000(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 2500$. Továbbá $\mathrm{Cov}\,(S,T) = 10000\mathrm{Cov}\,(\xi_1,\xi_1^2) = 0$, ezért a többváltozós centrális határeloszlástételben megjelenő határeloszlásban független normális eloszlású valószínűségi változók együttes eloszlását kell kiszámolnunk. Innen

$$P(S > 100,\, T > 5100) = P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S}} > \sqrt{2}, \frac{T-ET}{\sqrt{\mathrm{Var}\,T}} > 2\right) \sim (\zeta_1 > \sqrt{2}, \zeta_2 > 2),$$

ahol ζ_1 és ζ_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ezért $P(S > 100,\, T > 5100) \sim (1-\Phi(\sqrt{2}))(1-\Phi(2))$.

5.) Legyen $\eta_i = 1$, ha az i-ik, $i+1$-ik és $i+2$-ik dobás fej, és $\eta_i = 0$ egyébként, $1 \le i \le 98$. Ekkor az $S_{100} = \sum\limits_{i=1}^{98}\eta_i$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét akarjuk kiszámítani. Innen

$$ES_i = \sum_{i=1}^{98} E\eta_i, \quad \text{és} \quad \mathrm{Var}\,S_i = \sum_{i=1}^{98}\mathrm{Var}\,\eta_i + 2\sum_{i=1}^{97}\sum_{j=i+1}^{98}\mathrm{Cov}\,(\eta_i,\eta_j).$$

Viszont $E\eta_i = \frac{1}{8}$, $\mathrm{Cov}\,(\eta_i, \eta_j) = 0$, ha $j \geq i+3$, $\mathrm{Cov}\,(\eta_i, \eta_{i+1}) = E\eta_i\eta_{i+1} - E\eta_i E\eta_{i+1} = \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$, $\mathrm{Cov}\,(\eta_i, \eta_{i+2}) = E\eta_i\eta_{i+2} - E\eta_i E\eta_{i+2} = \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$, és $\mathrm{Var}\,\eta_i = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$. Innen $ES_{100} = \frac{98}{8}$, és $\mathrm{Var}\,S_{100} = \frac{98\cdot 7}{64} + 2\cdot 97\cdot\frac{3}{64} + 2\cdot 96\cdot\frac{1}{64} = \frac{1460}{64}$.

6.) Először definiáljuk a többváltozós standard normális eloszlású valószínűségi változó fogalmát. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ n-változós standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, és standard normális eloszlásúak. Legyen A *tetszőleges* $n \times n$ méretű mátrix, és $b = (b_1, \dots, b_n)$ n-dimenziós determinisztikus vektor, ξ n-változós standard normális eloszlású vektor. Ekkor $\eta = \xi A + b$ n-változós, normális eloszlású valószínűségi változó. Egy n-változós véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha eloszlása megegyezik egy az előbbi módon előállított η vektor eloszlásával valamilyen A mátrixszal, b vektorral és ξ standard normális eloszlású vektorral.

Ha A $n \times m$ méretű mátrix, b m-dimenziós vektor, xi n-változós standard normális eloszlású vektor, akkor $\eta = \xi A + b$ (illetve tetszőleges vele azonos eloszlású véletlen vektor m-változós normális eloszlású vektor.