Stacionárius sorozatok előrejelzése.

Ebben az előadásban a következő kérdést fogom tárgyalni: Tekintsük valószínűségi változók egy olyan $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots$ stacionárius Gauss sorozatát, amelyre $EX_n = 0$ (minden $n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ indexre), és legyen megadva ennek a sorozatnak az $r(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénye, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ha ismerjük e sorozat múltbeli viselkedését egy n időpontig, azaz az $X_j(\omega)$ valószínűségi változónak tudjuk az értékét minden $-\infty < j \le n$ indexre, akkor hogyan lehet megadni az X_{n+1} valószínűségi változó legjobb becslését ezen információk segítségével?

Először megfogalmazom a feladatot kissé pontosabban. Az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változóknak olyan $f(X_j, j \le n)$ függvényét keressük, amelyre az $E(X_{n+1} - f(X_j, j \le n))^2$ minimális. Más szavakkal az X_{n+1} valószínűségi változó legkisebb hibájú becslését keressük az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók segítségével, ahol a becslés hibáját úgy definiáljuk, mint a tekintett valószínűségi változó valódi és becsült értéke közötti különbség négyzetének a várható értékét.

Vegyük észre, hogy a legjobb becslés megtalálásának a kérdése a feltételes várható érték tulajdonságai miatt megegyezik azzal a problémával, hogy találjuk meg a X_{n+1} valószínűségi változó feltételes várható értékét, feltéve az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Ez a feladat átfogalmazható a következő módon is. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn azon ξ valószínűségi változók összességét, amelyekre $E\xi^2 < \infty$, és vezessük be közöttük a $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$ skalárszorzatot. (A tekintett valószínűségi változók lehetnek komplex értékűek is, és $\bar{\eta}(\omega)$ az $\eta(\omega)$ komplex konjugáltját jelöli.) Ilyen módon bevezettük a négyzetesen integrálható valószínűségi változók által generált Hilbert teret, és az előbb megfogalmazott feladat ekvivalens módon úgyis átfogalmazható, hogy meg kell adnunk a Hilbert tér X_{n+1} elemének a vetületét a tekintett Hilbert térnek az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók által generált σ-algebra szerint mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változókból álló alterére. Ez a feladat a tekintett X_j valószínűségi változók (együttes) Gauss eloszlása miatt tovább egyszerűsíthető. A keresett feltételes várható érték megegyezik az X_{n+1} valószínűségi változó vetületével az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók (megszámlálható) lineáris kombinációiból álló altérre, azaz a keresett becslés az az $Y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j X_{n-j}$ valószínűségi változó ($EY^2 < \infty$), amelyre $EX_j(X_{n+1} - Y) = 0$ minden $-\infty < j \le n$ indexre. (Lásd az alábbi feladatot.)

Feladat:

Legyenek Y és $X_1, X_2, \dots,$ együttesen normális eloszlású (nulla várható értékű) valószínűségi változók. Ekkor az Y valószínűségi változó Z vetülete az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók négyzetesen integrálható lineáris kombinációi által kifeszített altérre (a második momentummal rendelkező valószínűségi változókból álló Hilbert térben) merőleges minden az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók által generált σ-algebrára mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változóra. Ez azt jelenti, hogy ez a vetület megegyezik az $E(Y|X_1, X_2, \dots)$ feltételes várható értékkel.

Segítség: Vegyük észre, hogy az $Y - Z, X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók együttesen normális eloszlásúak, ezért az $E(Y-Z)X_j=0$, $j=1,2,\dots$, relációkból következik, hogy az $Y-Z$ valószínűségi változó független az $(X_1,X_2,\dots)$ vektortól. Ezért $Y-Z$ független az X_j valószínűségi változók minden $f(X_1,X_2,\dots)$ függvényétől is. Továbbá $E(Y-Z)=0$. Ez azt jelenti, hogy $E(Y-Z)f(X_1,X_2,\dots)=0$ minden az $X_1,X_2,\dots$ valószínűségi változók által generált σ-algebrára mérhető második momentummal rendelkező $f(X_1,X_2,\dots)$ valószínűségi változóra.

A fentiek alapján a feladat átfogalmazható úgy, mint egy a kovarianciafüggvény segítségével felírható végtelen lineáris egyenletrendszer megoldása. (Az ismeretlen c_j együtthatókat kell megtalálni a $R(n+1-k)=EX_kX_{n+1}=EYX_k=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jEX_{n-j}X_k=\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_jR(n-j-k)$, $-\infty<k\le n$, egyenletrendszerben.) Annak érdekében, hogy a megoldásról bizonyos hasznosabb információkat nyerhessünk, érdemes a feladatot más formában is tárgyalni. Először bevezetek néhány fogalmat és megadok néhány a Hilbert terek alapvető tulajdonságait felhasználó eredményt bizonyítás nélkül. Ezek kissé pongyolán fogalmazva azt állítják, hogy a feladatot redukálni lehet két eset vizsgálatára, amelyek közül az első eset azt jelenti, hogy már a nagyon régi megfigyelések is egyértelműen meghatározzák a rendszer további viselkedését, a második eset pedig azt, hogy a nagyon régi megfigyelések szinte semmi információt nem adnak arra, hogy mi történik a jövőben.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$H=B(X_j,\,-\infty<j<\infty),\qquad H_n=B(X_j,\,-\infty<j\le n),\quad -\infty<n<\infty,$$
$$S=\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}H_n. \tag{1}$$

A fenti jelölésekben $B(X_j,\,j\in T)$, ahol T az egész számok valamely részhalmaza, a T halmaz elemeivel indexelt X_j valószínűségi változók véges lineáris kombinációit tartalmazó legszükebb Hilbert teret jelöli, S pedig a legnagyobb minden H_n Hilbert tér által tartalmazott Hilbert tér.

Adva egy X_n, $n=\dots,-1,0,1,2,\dots$, stacionárius sorozat vezessük be a következő U shift operátort az X_n valószínűségi változók által kifeszített H Hilbert térben: $UX_n=X_{n+1}$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, és ha $Y=f(X_n,\,-\infty<n<\infty)\in H$, akkor ennek UY eltoltját (shift-jét) az $UY=Uf(X_n,\,-\infty<n<\infty)=f(UX_n,\,-\infty<n<\infty)\in H$ képlettel definiáljuk. Akkor és csak akkor nevezünk valószínűségi változók egy Y_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, sorozatát az X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, sorozat alárendelt sorozatának, ha $Y_n\in H$, sőt az $Y_n\in H_n$ reláció is teljesül minden $n=\dots,-1,0,1,\dots$, ahol H_n az (1) formulában van definiálva, és $UY_n=Y_{n+1}$ minden $n=\dots,-1,0,1,\dots$ indexre. Egy Y_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, az X_n sorozatnak alárendelt sorozat nyílvánvaló módon szintén stacionárius.

Szinguláris stacionárius sorozat definiciója. *Egy Y_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$ stacionárius (Gauss) sorozatot szingulárisnak nevezünk, ha $S=H$. A $H=B(Y_j,\,-\infty<$*

$j < \infty$), $H_n = B(Y_j, -\infty < j \le n)$, $S = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ az (1) képlethez hasonlóan definiáljuk. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben az Y_n sorozat segítségével definiáljuk a H, H_n és S Hilbert tereket.

Reguláris stacionárius sorozat definiciója. *Egy Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ stacionárius (Gauss) sorozatot regulárisnak nevezünk, ha $S = \emptyset$. A $H = B(Z_j, -\infty < j < \infty)$, $H_n = B(Z_j, -\infty < j \le n)$, $S = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ az (1) képlethez hasonlóan definiáljuk. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben a Z_n sorozat segítségével definiáljuk a H, H_n és S Hilbert tereket.*

Érvényes a következő egy stacionárius (Gauss) sorozat felbontásáról szóló tétel.

Tétel stacionárius sorozat felbontásáról a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére. *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius (Gauss) sorozat. Ekkor ennek létezik olyan*

$$X_n = Y_n + Z_n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{2}$$

előállítása valószínűségi változók két sorozatának az összegére úgy, hogy

a) Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatnak alárendelt szinguláris sorozat, Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatnak alárendelt reguláris sorozat.

b) Az Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, és Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatok korrelálatlanok, azaz

$$\mathrm{Cov}\,(Y_n, Z_m) = 0 \quad \text{minden } n, m = \dots, -1, 0, 1, \dots \text{ számpárra.}$$

Az X_n sorozat felbontása az alábbi tulajdonságú sorozatok összegére egyértelmű.

Ha Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, szinguláris sorozat, akkor e sorozat tetszőleges Y_k eleme benne van a $H_{-N}(Y_j, -\infty < j \le -N)$ Hilbert térben bármilyen nagy N indexre. Ez azt jelenti, hogy az Y_n sorozat múltjának ismerete bármilyen régi időpontig elegendő ahhoz, hogy az Y_k valószínűségi változót pontosan rekonstruáljuk. Ha Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris sorozat, akkor valamely tetszőleges Y_k elemének a vetülete a $H_{-N}(Y_j, -\infty < j \le -N)$ Hilbert térbe nagy N indexekre tart nullához. Ez informálisan azt jelenti, hogy a nagyon régi megfigyelések alig adnak információt egy Y_k valószínűségi változó becslésére. Igaz a következő Wold felbontásnak nevezett eredmény.

Tétel (Wold felbontás). *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris stacionárius sorozat. Ekkor létezik olyan az X_n sorozatnak alárendelt V_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat és valós számok olyan c_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ sorozata, emelyekre $EV_n = 0$, $EV_n^2 = 1$, $EV_nV_m = 0$, ha $n \ne m$, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = EX_1^2$, és*

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k} \quad \text{minden } n = \dots, -1, 0, 1, \dots \text{ indexre.} \tag{3}$$

Megfordítva, ha az X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, stacionárius sorozatnak létezik az adott tulajdonságú reprezentációja, akkor ez a sorozat reguláris.

1. feladat. Legyen egy X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, stacionárius sorozat előállítható egy W_n, $W_n\in B(X_j,-\infty<j<\infty)$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, nulla várható értékű 1 szórásnégyzetű korrelálatlan elemekből álló stacionárius Gauss sorozat mozgó átlagaként, (egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező W_n sorozat független, standard normális valószínűségi változókból áll), azaz létezzen valós számok olyan $d_0,d_1,\dots$, $\sum\limits_{n=0}^\infty |d_n|^2=EX_1^2<\infty$, sorozata, amelyek segítségével az X_n sorozat tagjai előállíthatóak $X_n=\sum\limits_{k=0}^\infty d_kW_{n-k}$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$ alakban. Ekkor X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, reguláris stacionárius sorozat.

2. feladat. Legyen egy X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, stacionárius sorozat előállítható egy W_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, nulla várható értékű 1 szórásnégyzetű korrelálatlan elemekből álló W_n stacionárius Gauss sorozat $X_n=\sum\limits_{k=0}^\infty d_kW_{n-k}$ mozgóátlagaként. Ekkor $|d_0|$ egyenlő az X_1 vektor távolságával a $B(W_j,\ -\infty<j\le 0)$ altértől. Ezért, ha $X_n=\sum\limits_{k=0}^\infty c_kV_{n-k}$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$ alakú az X_n sorozat Wold felbontása, akkor $|d_0|\le|c_0|$.

3. feladat. Legyen W_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, független nulla várható értékű 1 szórású valószínűségi változók sorozata, d_n, $n=0,1,\dots$, valós számok olyan sorozata, amelyre $\sum\limits_{n=0}^\infty d_n^2<\infty$. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^\infty d_nW_n$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál.
Segítség. Mutassuk meg a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével, hogy a $Z_N(\omega)=\sum\limits_{n=0}^N d_nW_n(\omega)$, $N=0,1,2,\dots$, sorozat 1 valószínűséggel Cauchy sorozat.

A fenti eredmények a Hilbert terek általános tulajdonságait használják ki. Így például a Wold felbontásban szereplő V_k valószínűségi változókat és a (3) formulában szereplő felbontást úgy kapjuk meg, hogy minden n számra tekintjük a H_{n-1} Hilbert tér D_n ortogonális kiegészítőjét a H_n Hilbert térre, és veszünk ebben egy 1-re normált V_n vektort. Némi munkával meg lehet mutatni, hogy ezeket a V_n vektorokat választhatjuk úgy, hogy íly módon egy az X_n sorozatnak alárendelt (ortonormált elemekből álló) stacionárius sorozatot kapjunk, amelynek elemei egyben a H Hilbert tér ortonormált bázisát alkossák. Az X_n valószínűségi változók sorfejtéseként ezen bázis alapján megkapjuk a (3) formulát.

Az így kapott eredmények azért nem kielégítőek számunkra, mert önmagukban nem elegendőek ahhoz, hogy megkapjuk a minket érdeklő predikciót. Nem nehéz belátni, hogy az X_n valószínűségi változó legjobb becslése az X_j, $j\le 0$ valószínűségi változók segítségével a $\sum\limits_{k=n}^\infty c_kV_{n-k}$ valószínűségi változó, de eddigi ismereteink nem elegendőek ahhoz, hogy explicit módon megadjuk a c_k együtthatókat és kiszámoljuk azt, hogy a V_n valószínűségi változók hogy fejezhetők ki az X_j valószínűségi változók lineáris kombinációjaként. További probléma, hogy az eddigi eredmények nem mondják meg, hogy egy ismert kovarianciájú Gauss folyamat mikor reguláris, és ha nem reguláris, akkor hogyan lehet megtalálni a sorozat (2) formulában megadott felbontását.

Annak érdekében, hogy ezekre a kérdésekre legalább részleges válaszokat adhassunk, szükségünk van az analízis néhány klasszikus eredményére. Először ismertetem a Bochner tételt pozitív definit függvények jellemzéséről, amely lehetővé teszi annak megmutatását, hogy egy stacionárius sorozat kovariancia függvénye előállítható, mint egy úgynevezett spektrál mérték Fourier transzformáltja. Definiáljuk először a pozitív definit függvényeket.

Pozitív definit függvények és sorozatok definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $f(t)$ függvény a számegyenesen pozitív definit, ha minden $t_1, \dots, t_N$ valós és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-esre teljesül a*

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} z_k \bar{z}_l f(t_k - t_l) \geq 0$$

egyenlőtlenség, ahol $\bar{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli.

Hasonlóan ha $a(n)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$ az egész számokkal indexezett számsorozat, akkor ezt a sorozatot akkor és csak akkor nevezzük pozitív definitnek, ha minden $a_1, \dots, a_N$ egész és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-esre teljesül a

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} z_k \bar{z}_l a(n_k - n_l) \geq 0$$

egyenlőtlenség.

Feladat: Mutassuk meg, hogy az $f_t(x) = e^{itx}$, t valós szám, függvény pozitív definit függvény minden (valós) x paraméterre, $a_k(n) = e^{ikn}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$ pozitív definit sorozat minden egész k számra.

A Bochner tétel a pozitív definit sorozatok és függvények jellemzését adja. Számunkra a következő egyszerű lemma miatt érdekes ez az eredmény.

Lemma. *Ha $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, stacionárius sztochasztikus folyamat, akkor az $R(t) = EX(s)X(t+s)$ kovariancia függvény pozitív definit függvény, amelyre $R(t) = R(-t)$. Ha X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$ stacionárius sorozat, akkor $R(n) = EX_m X_{n+m}$ pozitív definit sorozat, amelyre $R(n) = R(-n)$.*

Megfordítva, ha $R(n)$ pozitív definit sorozat, amelyre $R(n) = R(-n)$, akkor létezik valószínűségi változók olyan X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$ stacionárius sztochasztikus sorozata, amelynek ez az $R(n)$ sorozat az $R(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénye. Sőt, létezik az adott kovarianciafüggvénnyel rendelkező Gauss sorozat nulla várható értékű valószínűségi változókkal. Ez utóbbi esetben a sorozat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározza a kovarianciafüggvény.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hoggy $EX(t)=0$, Rögzítsünk valamely $t_1,\dots,t_N$ valós és $z_1,\dots,z_N$ komplex számokból álló szám n-es párt és tekintsük a $\sum\limits_{k=1}^N\sum\limits_{l=1}^N z_k\bar z_l R(t_k-t_l)$ kifejezést. Vegyük észre, hogy $\sum\limits_{k=1}^N\sum\limits_{l=1}^N z_k\bar z_l R(t_k-t_l)=\sum\limits_{k=1}^N\sum\limits_{l=1}^N z_k\bar z_l EX(t_k)X(t_l)=E\left(\sum\limits_{k=1}^N z_kX(t_k)\right)\overline{\left(\sum\limits_{k=1}^N z_kX(t_k)\right)}\ge 0$. Másrészt $R(-t)=EX(s+t)X(s)=R(t)$.

Hasonlóan, rögzítve valamely $n_1,\dots,n_N$ egész és $z_1,\dots,z_N$ komplex számokból álló szám n-es párt. Ekkor felírhatjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^N\sum\limits_{l=1}^N z_k\bar z_l R(n_k-n_l)=\sum\limits_{k=1}^N\sum\limits_{l=1}^N z_k\bar z_l EX_{n_k}X_{n_l}=E\left(\sum\limits_{k=1}^N z_kX_{n_k}\right)\overline{\left(\sum\limits_{k=1}^N z_kX_{n_k}\right)}\ge 0$, és $R(n)=R(-n)$.

A lemma utolsó állításának bizonyításához azt kell meggondolnunk, hogy ahhoz, hogy az adott $R(n)$ kovarianciafüggvényhez létezzen olyan normális sorozat, amelynek $(X(k_1),\dots,X_(k_p))$ véges dimenziós eloszlásainak a kovarianciamátrixát az $D(j,l)=\operatorname{Cov}(X(k_j),X(k_l))=R(k_j-k_l)$, $1\le j\le p$, kovarianciamátrix adja meg az kell, hogy ez a kovarianciamátrix a $k_1,\dots,k_l$ egész számok tetszőleges választása esetén pozitív definit legyen. Viszont ezt a feltételt az biztosítja, hogy az $R(n)$ sorozat pozitív definit. Ezenkívül emlékezzünk arra, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását annak várható értéke és kovariancia mátrixa meghatározza.

Bochner tétel. *Legyen $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, folytonos pozitív definit függvény. Ekkor létezik olyan véges $\mu(\cdot)$ mérték a számegyenesen, amelyre*

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\mu(\,dt),\qquad -\infty<x<\infty. \tag{4}$$

A (4) képletben szereplő μ mértéket az $f(x)$ függvény egyértelműen meghatározza.

Legyen $a(n)$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, pozitív definit sorozat az egész számokon. Ekkor létezik olyan véges mérték a $[-\pi,\pi)$ szakaszon, amelyre

$$a(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{itn}\mu(\,dt),\qquad n=\dots,-1,0,1,\dots$$

A μ mértéket az $a(n)$ sorozat egyértelműen meghatározza.

Következmény. *Legyen X_n, $EX_n=0$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, stacionárius sorozat $R(n)=EX_kX_{k+n}$ kovarianciafüggvénnyel. Akkor létezik olyan egyértelműen meghatározott $G(\,dx)$ mérték a $-\pi\le x\le\pi$ intervallumon, amelyre*

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}G(\,dt),\qquad n=\dots,-1,0,1,\dots \tag{5}$$

Speciálisan

$$EX_n^2=R(0)=\int_{-\pi}^{\pi}G(\,dt)=G([-\pi,\pi]).$$

A G mérték teljesíti a $G(A) = G(-A)$ tulajdonságot is minden mérhető A halmazra.

Bizonyítás. Mivel az $R(n)$ sorozat pozitív definit a Bochner tételből következik az (5) formula. Továbbá, mivel $R(n) = R(-n)$, és az $R(n)$ sorozat egyértelműen meghatározza a $G(\,dt)$ mértéket, innen következik, hogy $G(A) = G(-A)$.

1. megjegyzés. Az (5) formulában szereplő G mértéket az $R(n)$ kovarianciafüggvény spektrálmértékének nevezik az irodalomban. Ha a G mérték abszolut folytonos a (Lebesgue mértékre nézve), akkor ennek $g(x) = \frac{dG}{dx}(x)$ deriváltját a kovarianciafüggvény spektrálsűrűségének nevezik. Ha létezik az $R(n)$ függvénynek $g(x)$ spektrálsűrűsége, akkor az (5) formula felírható a következő ekvivalens módon is:

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} g(t)\, dt, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{5'}$$

2. megjegyzés. Egy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon definiált G mértéket, amelyre $G([-\pi, \pi]) < \infty$, $G(A) = G(-A)$ minden mérhető függvényre spektrál mértéknek is neveznek. Az elnevezés oka az, hogy létezik olyan X_n, $n = -\dots, -1, 0, 1, \dots$, Gauss eloszlású stacionárius sorozat, amelynek ez a G mérték a spektrál mértéke. Azt is feltehetjük, hogy e sorozat elemei teljesítik az $EX_n = 0$ feltételt. Valóban, ha az $EX_k X_{k+n} = R(n)$ függvény segítségével meg tudjuk adni a keresett Gauss sorozat véges dimenziós eloszlásainak kovariancia mátrixát, így magukat a véges dimenziós eloszlásokat is.

A spektrál mérték bevezetése azért hasznos, mert ilyen módon a Fourier analízis módszereit tudjuk alkalmazni. Egy stacionárius sorozat kovarianciafüggvénye előáll, mint a spektrál mérték Fourier transzformáltja. A kovarianciafüggvény vagy a spektrál mérték megadása ekvivalens. Sok vizsgálatban hasznosabb a spektrál mértékkel dolgozni.

Legyen adva egy stacionárius Gauss folyamat valamely G spektrál mértékkel. Lehetséges és érdemes konstruálni olyan úgynevezett véletlen (normális) spektrál mértéket, amelynek segítségével magát a sztochasztikus folyamatot is elő tudjuk állítani ezen véletlen spektrál mértéknek a Fourier transzformáltjaként. Ezt az eredményt, illetve a bizonyításban szükséges gondolatmenetet röviden ismertetem. Először bevezetem a következő definiciót.

Véletlen (normális) spektrálmérték definiciója. *Legyen adva egy G spektrálmérték a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy egy véletlen Z_G mérték a G spektrálmértéknek megfelelő véletlen (normális) spektrál mérték, ha teljesíti a következő tulajdonságokat.*

(i.) Minden mérhető $A \subset [-\pi, \pi]$ halmazra létezik egy komplex értékű

$$Z_G(A) = \operatorname{Re} Z_G(A) + i \operatorname{Im} Z_G(A)$$

valószínűségi változó, amelyet az A halmaz véletlen mértékének nevezünk.

(ii.) *A* $\mathrm{Re}\, Z_G(A)$, $\mathrm{Im}\, Z_G(A)$, $A \subset [-\pi, \pi]$ *mérhető halmaz, valószínűségi változók együttesen Gauss eloszlásúak, azaz bármely véges sok valószínűségi változónak ezek közül az együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás.*

(iii.) $EZ_G(A) = 0$ *minden* $A \subset [-\pi, \pi]$ *mérhető halmazra.*

(iv.) $EZ_G(A)\overline{Z_G(B)} = G(A \cap B)$, *ahol* $\bar{z}$ *a* z *szám konjugáltját jelöli.*

(v.) $\sum\limits_{j=1}^{n} Z_G(A) = Z_G\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right)$, *ha* $A_1, \dots, A_n$ *diszjunkt halmazok.*

(vi.) $Z_G(-A) = \overline{Z_G(A)}$.

Észrevétel. A $\mathrm{Re}\, Z_G(A)$ és $\mathrm{Im}\, Z_G(B)$ valószínűségi változók függetlenek. Valóban, ehhez elég megmutatni a normális eloszlás miatt, hogy korrelálatlanok. Viszont

$$\begin{aligned} E\mathrm{Re}\, Z_G(A)\mathrm{Im}\, Z_G(B) &= \frac{1}{4}E\left[(Z_G(A) + \overline{Z_G(A)})(Z_G(B) - \overline{Z_G(B)})\right] \\ &= \frac{1}{4}E\left[(Z_G(A) + Z_G(-A))(\overline{Z_G(-B)} - \overline{Z_G(B)})\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(G(A \cap (-B)) - G(A \cap B) + G((-A) \cap (-B)) - G((-A) \cap B)\right) = 0. \end{aligned}$$

Feladat: Ha $(A_1) \cup (-A_1)$, ... , $A_n \cup (-A_n)$ diszjunktak, akkor $Z_G(A_1)$, ... $Z_G(A_n)$ függetlenek. Ha $A \cap (-A) = \emptyset$, akkor $\mathrm{Var}\,(\mathrm{Re}\, Z_G(A)) = \mathrm{Var}\,(\mathrm{Im}\, Z_G(A)) = \frac{G(A)}{2}$. Továbbá, $\mathrm{Re}\, Z_G(A) = \mathrm{Re}\, Z_G(-A)$, $\mathrm{Im}\, Z_G(A) = -\mathrm{Im}\, Z_G(-A)$.
Segítség: Az első állítás bizonyításához azt kell megmutatni, hogy

$$E\mathrm{Re}\, Z_G(A_j)\mathrm{Re}\, Z_G(A_k) = 0, \quad \text{és} \quad E\mathrm{Im}\, Z_G(A_j)\mathrm{Im}\, Z_G(A_k)) = 0,$$

ha $(A_j \cup (-A_j)) \cap (A_k \cup (-A_k)) = \emptyset$. Viszont

$$\begin{aligned} E\mathrm{Re}\, Z_G(A_j)\mathrm{Re}\, Z_G(A_k) &= \frac{1}{4}E(Z_G(A_j) + \overline{Z_G(A_j)})(Z_G(A_k) + \overline{Z_G(A_k)}) \\ &= \frac{1}{4}\big(EZ_G(A_j)\overline{Z_G(-A_k)} + EZ_G(A_j)\overline{Z_G(A_k)} \\ &\quad + EZ_G(-A_j)\overline{Z_G(-A_k)} + EZ_G(-A_j)\overline{Z_G(A_k)}\big) = 0 \end{aligned}$$

az adott feltételek mellett, és az $E\mathrm{Im}\, Z_G(A_j)\mathrm{Im}\, Z_G(A_k)) = 0$ reláció hasonlóan bizonyítható.

Ha $A \cap (-A) = \emptyset$, akkor $E(\mathrm{Re}\,(Z_G(A))^2 = \frac{1}{4}E(Z_G(A) + \overline{Z_G(-A)})^2 = \frac{G(A)}{2}$. Hasonlóan $E(\mathrm{Re}\,(Z_G(-A))^2 = \frac{G(A)}{2}$. Mivel $Z_G(-A) = \overline{Z_G(A)}$ az (vi) reláció szerint, innen következik a Feladat még nem tárgyalt állítása.

A fent megadott definició bár technikainak látszik természetes. Ha egy Z_G véletlen mérték teljesíti a fenti tulajdonságokat, akkor definiálhatjuk az $\int f(t)Z_G(\,dt)$ mértéket a következő módon. Először definiáljuk ezt az integrált természetes módon $f(t) =$

$\sum_{j=1}^{n} c_j I_{A_j}(t)$ alakú elemi függvényekre, ahol $A_1, \dots, A_n$ mérhető diszjunkt részhalmazai a $[-\pi, \pi]$ intervallumnak, és $I_A(\cdot)$ az A halmaz indikátorfüggvénye. A definiciót az

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} c_j I_{A_j}(t) \right) Z_G(\,dt) = \sum_{j=1}^{n} c_j Z_G(A_j)$$

képlettel adjuk meg. Nem nehéz belátni, hogy teljesül az

$$E\left(\int f(t) Z_G(\,dt) \overline{\int h(t) Z_G(\,dt)} \right) = \int f(t) \overline{h(t)} G(\,dt) \tag{6}$$

elemi függvények minden $(f(t), h(t))$ párjára. Valóban, legyen $f(t) = \sum_{j=1}^{M} c_j I_{A_j}(t)$, $h(t) = \sum_{k=1}^{N} d_k I_{B_k}(t)$, ahol $A_1, \dots, A_M$ és $B_1, \dots, B_N$ a $[-\pi, \pi)$ intervallum particiói, c_j, $j = 1, \dots, M$, d_k, $k = 1, \dots, N$, komplex számok. Ekkor

$$E\left(\int f(t) Z_G(\,dt) \overline{\int h(t) Z_G(\,dt)} \right) = E\left(\sum_{j=1}^{M} c_j Z_G(A_j) \right) \left(\overline{\sum_{k=1}^{N} d_k Z_G(B_k)} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} c_j \bar{d}_k E Z_G(A_j) \overline{Z_G(B_k)} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} c_j \bar{d}_k G(A_j \cap B_k) = \int f(t) \overline{h(t)} G(\,dt).$$

A lépcsős függvényekre fent igazolt (6) tulajdonság lehetővé teszi, hogy az $\int f(t) Z_G(\,dt)$ integrált az L_2 izomorfia segítségével kiterjesszük minden olyan f függvényre, amelyre $\int |f(t)|^2 G(\,dt) < \infty$ úgy, hogy a (6) reláció továbbra is érvényben maradjon. Ez a kiterjesztés egyértelmű. Vegyük észre, hogy igaz a következő

Észrevétel. Ha $f(t)$ olyan $f \in L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G)$ függvény, amelyre $f(-t) = \overline{f(t)}$, akkor az $\int f(t) Z_G(\,dt)$ véletlen integrál 1 valószínűséggel valós értékű valószínűségi változó.

Valóban, a fenti észrevétel igaz lépcsős függvényekre, és alkalmas határátmenettel megkapjuk az állítást tetszőleges adott tulajdonságú f függvényre.

Érdemes megjegyezni, hogy az $f(-t) = \bar{f}(t)$ azonosság jellemzi a valós értékű függvények, illetve valós értékű előjeles mértékek Fourier transzformáltját. Definiáljuk az

$$X_n = \int e^{int} Z_G(\,dt), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{7}$$

integrálokat. Az X_n valószínűségi változók valós értékűek, és a (6) reláció alapján $E X_k X_{k+n} = E X_{n+k} \overline{X_k} = \int e^{int} G(\,dt)$. Ez azt jelenti, hogy az e^{int} függvényeknek $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, a Z_G véletlen spektrál mérték szerinti integráljának a segítségével elő tudtunk állítani egy olyan stacionárius Gauss sorozatot, amelynek spektrálmértéke a G mérték. Némi plusz munkával be lehet látni, hogy egy adott G spektrálmértékű stacionárius Gauss sorozathoz lehet konstruálni olyan véletlen spektrál mértéket, amely magát az eredeti sorozatot állítja elő. Ezt fogalmazom meg az alábbi eredményben.

Tétel. *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, normális eloszlású stacionárius Gauss sorozat nulla várható értékű valószínűségi változókkal valamely G spektrál mértékkel. Ekkor lehet konstruálni a G spektrál mértéknek megfelelő normális véletlen Z_G spektrál mértéket úgy, hogy az e véletlen mérték szerinti integrál teljesíti a (7) képletet, azaz a (7) képlet jobb oldala egyenlő a kiindulásként megadott X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozat megfelelő tagjával.*

Bizonyítás. Tekintsük a H teret, azaz az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, valószínűségi változók négyzetesen integrálható lineáris kombinációiból álló Hilbert teret, és definiáljuk a H tér J leképezését az $L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G(\,dt))$ térre, (ahol $\mathcal{B}$ jelöli a Borel σ-algebrát a $[-\pi, \pi)$ intervallum részhalmazain) a következő módon: Legyen $J\left(\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j e^{ijt}\right) = \sum\limits_{j=-N}^{N} c_j X_j$ minden véges lineáris kombinációra. Nem nehéz belátni, hogy J normatartó leképezés. Ezért a fenti J leképezést ki tudjuk terjeszteni a véges lineáris kombinációkról azok lezártjára is. Ez a J leképezés az $L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G(\,dt))$ és a H tér között L_2 izomorfiát létesít. (Azt kell tudnunk, hogy a véges $\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j e^{ijt}$ lineáris kombinációk az $L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G(\,dt))$ tér mindenütt sűrű részhalmazát alkotják.)

Definiáljuk a $Z_G(A)$ valószínűségi változót a $Z_G(A) = J(I_A(t))$ képlet segítségével, ahol $I_A(t)$ az A halmaz indikátor függvényét jelöli. A $Z_G(\cdot)$ valószínűségi változók teljesítik az (i.)–(vi.) tulajdonságokat. Az (i), (ii), (iii) és (v) tulajdonságok teljesülése nyílvánvaló, a (iv) reláció következik az L_2 izomorfiából, a (vi) tulajdonság pedig a $J(-f) = \overline{J(f)}$ relációból. Továbbá a J transzformáció L_2 izomorfiája és a (6) reláció alapján $J(f) = \int f(t) Z_G(\,dt)$ minden $f \in L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G)$ függvényre. Tehát speciálisan $X_n = J(e^{int}) = \int e^{int} Z_G(\,dt)$.

A stacionárius sorozatok spektrálreprezentációja lehetővé teszi, hogy a komplex függvénytan néhány mély eredményeinek a segítségével megoldjuk a predikciós problémát. Vegyük észre, hogy e feladat megoldásához elegendő a Wold felbontást effektív leírása, azaz elég explicit módon megadni a (3) képletben szereplő c_k konstansokat és V_k valószínűségi változókat. (Lásd az alábbi feldatatot.)

Feladat: Legyen megadva egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, (reguláris) stacionárius Gauss sorozat $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$ Wold féle felbontása. Ekkor egy X_m, $m \ge 1$ valószínűségi változó optimális becslése az X_n, $n \le 0$, valószínűségi változók segítségével, azaz X_m ortogonális vetülete a $B(X_n,\, n \ge 0)$ altérre egyenlő az $\hat{X}_m = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k V_{m-k}$ valószínűségi változóval, a becslés szórásnégyzete pedig $\sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k^2$.

Segítség: Vegyük észre, hogy a Wold felbontás tulajdonságai alapján $B(X_n,\, n \le 0) = B(V_n,\, n \le 0)$.

Tekintsünk egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, (reguláris) stacionárius Gauss sorozatot és annak egy $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ alakú előállítását mozgó átlag formában. Célunk az ilyen mozgó átlagok explicit megadása. E mozgó átlag előállítások közül minket különösen a Wold felbontás érdekel. E feladat vizsgálatában érdemes bevezetni az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2-teret, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra és λ a Lebesgue mérték a $[-\pi,\pi)$ intervallumon. Definiáljuk e térnek egy természetes, az X_n stacionárius sorozat mozgó átlag felbontását jellemző izomorfiáját a $B(X_n,\, -\infty < n < \infty)$ Hilbert térbe. Ennek érdekében vezessük be az $e_k(t) = e^{ikt}$, $-\pi \le t < \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ függvényeket az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ téren, és e tér $I(e_k(t)) = W_k$,

$$J\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e_k(t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k W_k, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty,$$

leképezését a $B(W_n,\, -\infty < n < \infty)$ Hilbert-térbe. Nem nehéz belátni, hogy ez a J transzformáció az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2 tér és a $B(W_n,\, -\infty < n < \infty) \supset B(X_n,\, -\infty < n < \infty)$ Hilbert tér egy izomorfiája. (Vegyük észre, hogy az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2 tér elemei a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikt}$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$, alakú függvények, mert az $e_k(t) = e^{ikt}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2 térben. Másrészt a W_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, valószínűségi változók ortonormált bázist alkotnak a $B(W_n,\, -\infty < n < \infty)$ térben. Ezért e tér elemei felírhatóak egyértelmű módon $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_k W_k$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ alakban.)

Célunk először az, hogy az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k} = J\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e_{n-k}(t)\right)$ jellemzésben megadjuk a d_k konstansokat. Ha ezt megadjuk, akkor képesek leszünk véletlen integrálok segítségével magát a mozgó átlagot is előállítani. Ez speciálisan lehetővé teszi a Wold felbontás megadását.

Tekintsük egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, (reguláris) stacionárius sorozat egy $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ mozgó átlag előállítását, és definiáljuk az ezen mozgóátlag reprezentáció segítségével meghatározott

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{itk}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty, \qquad -\pi \le t \le \pi \tag{a1}$$

függvényt. Mivel a d_k együtthatók valósak ezért teljesül a

$$h(-t) = \overline{h(t)} \quad \text{minden } -\pi \le t \le \pi \text{ számra} \tag{a2}$$

azonosság. Továbbá vegyük észre, hogy a mozgó átlag tulajdonság és a Parseval azonosság alapján, bevezetve a $d_k = 0$, ha $k < 0$ jelölést az (a1) formulában szereplő együtthatók kiterjesztéseként, az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\begin{aligned} EX_jX_{n+j} &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n+j-k}\right)\overline{\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{j-k}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{n+j-k}\bar{d}_{j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{n+k}\bar{d}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}h(t)\bar{h}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}|h(t)|^2\,dt \end{aligned} \tag{8}$$

minden $n \ge 0$ egész számra. Az (a2) tulajdonság alapján $|h^2(t)| = |h^2(-t)|$. Ez a tény a (8) formula valamint egy stacionárius sorozat spektrálmértékének egyértelműségéből következik, hogy a mozgó átlag formában előállított stacionárius sorozatnak létezik spektrál sűrűség függvénye, és az megadható $g(t) = \frac{|h^2(t)|}{2\pi}$, $-\pi \le t \le \pi$, alakban. Tehát azt kaptuk, hogy az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatnak létezik $g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$ spektrál sűrűségfüggvénye, és

$$\frac{|h^2(t)|}{2\pi} = g(t), \quad \text{ahol } g(t) \text{ az } X_n,\ n = 0 \pm 1, \dots, \text{ sorozat spektrál sűrűség függvénye.} \tag{a3}$$

Az alábbi lemmában összefoglaljuk a fenti érvelés segítségével kapott eredményeket.

2A. Lemma *Létezzen egy X_n stacionárius sorozatnak egy $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, alakú mozgó átlag reprezentációja, ahol W_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, és a d_n, $n = 0, 1, 2 \dots$ együtthatók valós számok. Ekkor az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatnak létezik $g(t)$, $-\pi \le t \le t$, spektrálsűrűség függvénye, és létezik egy az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságot teljesítő $h(t)$ függvény.*

A 2A. Lemma szükséges feltételt adott arra, hogy egy stacionárius sorozat előállítható legyen mozgó átlag formában valamely d_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, együtthatók segítségével. Be fogunk látni egy 2B. Lemmát, amely azt állítja, hogy a fent megfogalmazott feltételek egyben elégségesek is ahhoz, hogy egy stacionárius sorozatot előállíthassunk adott tulajdonságú mozgó átlag formájában, sőt véletlen spektrál mértékek szerinti integrálok segítségével meg is ad egy ilyen reprezentációt.

Hangsúlyozni szeretném, hogy a $h(t)$ függvény (a1) előállításában speciális alakú Fourier sor szerepel, olyan amelyik csak $k \ge 0$ paraméterű e^{ikt} alakú trigonometrikus függvényeket tartalmaz. Ez az a tulajdonság, amely miatt az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokat teljesítő $h(t)$ függvények megkeresésében a komplex függvénytan módszerei nagyon hasznosnak bizonyultak. Emlékeztetni szeretnék továbbá arra, hogy mint azt a Wold felbontás létezését kimondó tétel után megfogalmazott 2. feladatban megfogalmaztam, a Wold felbontásnak megvan az az extremum tulajdonsága egy stacionárius sorozat mozgó átlag előállításai között, hogy ennek a legnagyobb a konstans együtthatója. Mint látni fogjuk, ez a tény segít a Wold felbontás megtalálásában.

A 2B. Lemma tárgyalása előtt szükségünk van egy technikai jellegű eredményre, amely tekinthető úgy, mint véletlen spektrál mértékek szerinti integrálok helyettesítési szabálya.

Lemma véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesítési szabályáról. *Legyen adva egy G spektrál mérték, egy a G spektrálmértéknek megfelelő Z_G véletlen mérték a $[-\pi,\pi)$ intervallumon, valamint egy olyan $u(t)$ függvény, amelyre $u(-t)=\overline{u(t)}$, és $\int |u^2(t)|G(\,dt)<\infty$. Ekkor a $Z_{G,u}$, $Z_{G,u}(A)=\int u(t)I_A(t)Z_G(\,dt)$, $A\in\mathcal{B}$, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra a $[-\pi,\pi)$ intervallumon, és $I_A(\cdot)$ az A halmaz indikátor függvénye a $\bar G(A)=\int_A |u^2(t)|G(\,dt)$ spektrál mértéknek megfelelő véletlen spektrál mérték a $[-\pi,\pi)$ intervallumon. Továbbá $\int f(t)Z_{G,u}(\,dt)=\int f(t)u(t)Z_G(\,dt)$ minden a $\bar G$ spektrál mérték szerint négyzetesen integrálható f függvényre.*

Bizonyítás. Nem nehéz belátni a (6) tulajdonság segítségével, hogy a Lemmában definiált $Z_{G,u}$ véletlen mérték az (i)–(vi) tulajdonságok mindegyikét teljesítő a $\bar G$, $\bar G(A)=\int_A |u^2(t)|G(\,dt)$ spektrál mértéknek megfelelő véletlen spektrál mérték.

Tekintsük az $J_1(f)=\int f(t)Z_{G,u}(\,dt)$ és $J_2(f)=\int f(t)u(t)Z_G(\,dt)$ véletlen integrálokat minden olyan f függvényre, amelyre $\int |f^2(t)|\bar G(\,dt)<\infty$. (Ilyen függvényekre $\int |f(t)u(t)|^2G(\,dt)=\int |f^2(t)|\bar G(\,dt)<\infty$, ezért mind a két tekintett integrál létezik.) Vegyük észre, hogy minden $A\in\mathcal{B}$ halmazra $J_1(I_A(t))=J_2(I_A(t))$, továbbá tetszőleges f_1 és f_2 a $\bar G$ mérték szerint négyzetesen integrálható függvénypárra $EJ_1(f_1)\overline{J_1(f_2)}=EJ_2(f_1)\overline{J_2(f_2)}=\int f_1(t)\overline{f_2(t)}\bar G(\,dt)$. Mivel mind J_1 mind J_2 korlátos lineáris leképezése a $\bar G$ mérték szerint négyzetesen integrálható függvényeknek a második momentummal rendelkező valószínűségi változók terébe, és az $I_A(t)$ alakú függvények lineáris kombinációi e leképezések értelmezési tartományának mindenütt sűrű részhalmazát alkotják, innen következik a Lemma állítása.

Az alábbi 2B. Lemmában megfogalmazom azt az állítást, amely szerint egy stacionárius sorozat mozgó átlag előállításának a 2A. Lemmábban megfogalmazott szükséges feltétele egyben elégséges is.

Lemma 2B. *Legyen X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, stacionárius Gauss sorozat 0 várható értékű valószínűségi változókkal, amelynek van $g(t)$, $-\pi\le t\le\pi$, spektrál sűrűség függvénye, és létezik az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokat teljesítő $h(t)$ függvény és d_k, $k=0,1,2,\dots$, számsorozat. Tekintsük az X_n stacionárius sorozat $X_n=\int e^{int}Z_G(\,dt)$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, alakú előállítását alkalmas az X_n sorozat G spektrálmértékének megfelelő Z_G véletlen spektrálmérték szerinti integrál segítségével. (Tudjuk, hogy ilyen előállítás lehetséges.) Vegyük az $u(t)=\frac{1}{\overline{h(t)}}$ függvényt, és a véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesítési szabályáról szóló lemmában definiált $Z_{G,u}$ véletlen spektrál mértéket, ahol $h(t)$ az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságot teljesítő függvény. Ekkor az*

$$W_n=\int e^{int}Z_{G,u}(\,dt)=\int \frac{e^{int}}{\overline{h(t)}}Z_G(\,dt),\quad n=\dots,-1,0,1,\dots,\quad u(t)=\frac{1}{\overline{h(t)}} \tag{9}$$

valószínűségi változók függetlenek és standard normális eloszlásúak. Ezenkívül az X_n

sorozat előállítható

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{10}$$

alakban, ahol d_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, az (a1) formulában szereplő (valós) számok sorozata.

Bizonyítás: Fel fogom használni egy később idézett fontos komplex függvénytani eredménynek azt a következményét, amely szerint egy az (a1) tulajdonságot teljesítő $h(t)$ függvény a $[-\pi, \pi]$ intervallumon majdnem mindenütt különbözik nullától. Ezért az $u(t) = \frac{1}{\overline{h(t)}}$ függvény létezik, $\bar{G}(A) = \int_A \frac{1}{|h^2(t)|} G(\,dt) = \frac{1}{2\pi}\lambda(A)$ az (a3) tulajdonság alapján, és ezért $\bar{G} = \frac{1}{2\pi}\lambda$, ahol λ a Lebesgue mértéket jelöli a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Innen, és a (7) képletből következik, hogy a (9) formulában definiált (együttesen) normális eloszlású W_n valószínűségi változók nulla várható értékűek, 1 szórásúak, és korrelálatlanok. Ezért a (9) képletben valóban egy független standard normális eloszlású valószínűségi változókból álló sorozatot definiáltunk.

Az (a2) tulajdonságból következik, hogy a d_k számok valósak. A (9) képletből, illetve a véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesítési szabályáról szóló lemmából következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \int \frac{e^{i(n-k)t}}{\overline{h(t)}} Z_G(\,dt) = \int \frac{e^{int}}{\overline{h(t)}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-ikt} \right) Z_G(\,dt).$$

(Az utolsó formulában alkalmazott végtelen összegzés is jogos, ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn tekintett L_2 normában vett konvergenciát tekintjük.) Az utolsó azonosságból, valamint az (a1) és (a2) képletből kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k} = \int e^{int} \frac{h(-t)}{\overline{h(t)}} Z_G(\,dt) = \int e^{int} Z_G(\,dt) = X_n.$$

Innen következik a (10) formula. A Lemma bizonyítását befejeztük.

1. megjegyzés. A (10) formulából látszik, hogy a Lemmában megkonstruált mozgóátlagban szereplő W_n valószínűségi változók teljesítik a $W_n \in B(X_j,\, -\infty < j < \infty)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tulajdonságot. A Wold felbontást az tünteti ki a többi mozgó átlag reprezentáció közül, hogy a benne szereplő V_n valószínűségi változók még az erősebb $V_n \in B(X_j,\, -\infty < j \le n)$ tulajdonságot is teljesítik.

2. megjegyzés. Az X_n sorozat 2B. lemmában megadott mozgóátlag előállításban szereplő W_n valószínűségi változók definiciója nem annyira ad hoc jellegű, mint ahogy az első pillanatban gondolnánk. Valóban, írjuk fel a mozgó átlag alakban előállítani kivánt stacionárius sorozat elemeit $X_n = \int e^{int} Z_G(\,dt)$ $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ véletlen spektrál mérték szerinti integrál alakban, és keressük a W_n független standard normális valószínűségi változókat $W_n = \int e^{int} \bar{Z}_0(\,dt)$ alakban, ahol Z_0 alkalmas a $[-\pi, \pi]$ intervallumon tekintett $\frac{1}{2\pi}\lambda$ spektrálmértékhez tartozó véletlen spektrál mérték. Ekkor az $X_n =$

$\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ azonosság felírható $\int e^{int} Z_G(\,dt) = \int e^{int} h(-t)\bar{Z}_0(\,dt)$, $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{ikt}$ alakban is. Ennek az azonosságnak minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ indexre teljesülnie kell. Be lehet látni, hogy ezt csak $Z_G(\,dt) = h(-t)\bar{Z}_0(\,dt) = \overline{h(t)}\bar{Z}_0(\,dt)$ választással érhető el. Ezt a választást alkalmaztuk a (10) formulában.

Az ismertetett eredmények alapján a predikciós feladat legfontosabbb része az (a1), (a2) és (a3) feltételeket teljesítő $h(t)$, $-\pi \le t \le \pi$ függvények megtalálása, illetve ezek közül azoké a függvényeké, amelyekre a konstans tag $|d_0|$ abszolut értéke a maximumot veszi fel. Ez utóbbi feladat megoldása a Wold felbontás megtalálása érdekében szükséges. Tudjuk az eddigiek alapján is, hogy ez a maximum felvétetik, de nem tudjuk, hogy ez az előírás egyértelműen meghatározza-e a $h(t)$ függvényt.

A feladat megoldása érdekében egy az (a1), (a2), (a3) feltételt teljesítő $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{ikt}$ függvényhez társítsuk a $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d^k z^k$ a $\{z\colon |z| < 1\}$ egységkörön analitikus függvényt, és vezessük be a $h(t)$ függvény $\tilde{h}(\lambda)$ "feltekerését" a $\{z = e^{i\lambda}, -\pi \le \lambda < \pi\}$ körvonalra a $\tilde{h}(e^{i\lambda}) = h(\lambda)$ képlettel. Hasonlóan definiáljuk egy stacionárius sorozat $g(t)$ spektrálsűrűségének (feltéve, hogy létezik ez a spektrálsűrűség) a $\tilde{g}(e^{i\lambda}) = g(\lambda)$, $-\pi \le \lambda < \pi$, "feltekerését" az egységkörre. A komplex függvénytan bizonyos eredményeiből következik, hogy a $H(z)$, $|z| < 1$, függvény $\lim\limits_{r \to 1} H(re^{i\lambda t})$ radiális limesze majdnem minden $-\pi \le \lambda < \pi$ számra létezik, és egyenlő a $\tilde{h}(e^{i\lambda})$ függvénnyel. Ez azt jelenti, hogy elég a $h(t)$ függvények helyett a $H(z)$ függvényeket megtalálni. Ez utóbbi feladatot a komplex függvénytan módszereivel egyszerűbb megoldani.

Szeretném hangsúlyozni, hogy a $H(z)$ függvény radiális limeszének létezéséről előbb megfogalmazott állítás nem nyílvánvaló, hanem külön indoklásra szorul. Az eredeti feltételek csak azt biztosítják, hogy a $H(z)$ függvény az egységkör belsejében analitikus. Az, hogy egy az egységkör belsejében analitikus függvény hogyan viselkedik az egységkör határán a komplex függvénytan nehéz kérdéseihez tartozik. Jelen esetben az az észrevétel könnyítheti meg a probléma vizsgálatát, hogy az adott tulajdonsággal rendelkező analitikus függvények a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztályba tartoznak, amelyről sokat lehet tudni. Bár számunkra csak a $\mathcal{H}_2$ osztály jellemzése lesz érdekes, megadom a $\mathcal{H}_p$ osztályok definicióját tetszőleges $0 < p \le \infty$ paraméterre.

Hardy osztályok definiciója. *A $\mathcal{H}_p$ függvényosztály, $0 < p \le \infty$, azokból a $\{z\colon |z| < 1\}$ egységkörön analitikus $g(z)$ függvényekből áll, amelyekre*

$$\sup_{r<1} \|h(re^{i\lambda})\|_p^p = \sup_{r<1} \int |h(re^{i\lambda})|^p \, d\lambda < \infty, \quad \text{ha } 0 < p < \infty,$$

és

$$\sup_{r<1} \|h(re^{i\lambda})\|_\infty = \sup_{r<1,\, -\pi \le \lambda < \pi} |h(re^{i\lambda})| < \infty, \quad \text{ha } p = \infty.$$

Nem nehéz belátni, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty$ feltétel miatt $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ eleme a $\mathcal{H}_2$ osztálynak. Számunkra a következő komplex függvénytani tétel lesz különösen hasznos. Ennek bizonyítását egy kiegészítésben ismertetem, ahol néhány további komplex függvénytani kiegészítést is teszek.

Tétel Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről. *Egy $H(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ hatványsorral megadott analitikus függvény akkor és csak akkor van a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztályban, ha teljesül a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|^2<\infty$ feltétel. Tekintsünk egy $H(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|^2<\infty$, a $\mathcal{H}_2$ osztályba tartozó függvényt, valamint a $h(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\lambda}$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, függvényt. Ekkor*

(i) $\lim\limits_{r\to1} H(re^{i\lambda t})=h(\lambda)$ majdnem minden $-\pi\le\lambda\le\pi$ számra. Továbbá a $H_r(\lambda)=H(re^{i\lambda t})$ függvények a (Lebesge mérték szerinti) L_2 normában is konvergálnak a $h(\lambda)$ függvényhez. (Az (i) pont állítását úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a $H(z)$ függvény radiális limesze létezik, és egyenlő a $h(\lambda)$ függvénnyel mind a majdnem mindenütt mind az L_2 norma szerint.

(ii) Ha a $H(z)$ függvény nem azonosan nulla, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} |\log|h(\lambda)||\,d\lambda<\infty$. Speciálisan, ebben az esetben a $h(\lambda)$ függvény csak nulla mértékű halmazon lehet nulla.

Az a probléma érdekel minket, hogy egy stacionárius Gauss sorozat lehetséges $X_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ mozgó átlag előállításában milyen d_k, $k=0,1,\dots$, együtthatósorozatok szerepelnek. Külön érdekel minket az a kérdés, hogy milyen együtthatók szerepelnek a Wold felbontásban. A vizsgálandó probléma része az is, hogy milyen spektrálsűrűséggel rendelkező stacionárius folyamatoknak létezik a sorozat mozgóátlag előállítása. Ez a kérdés úgy is megfogalmazható, hogy milyen spektrálsűrűséggel rendelkező stacionárius folyamatok regulárisak. (Tudjuk, hogy egy reguláris stacionárius sorozatnak van spektrálsűrűség függvénye.) Láttuk, hogy a felvetett probléma ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy egy adott $g(t)$ spektrálsűrűsség függvény esetén, melyek az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokkal rendelkező d_k, $k=0,1,\dots$, sorozatok. Az előbb megfogalmazott a Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről szóló tétel segítségével át tudjuk fogalmazni ezt a kérdést egy komplex függvénytani problémává. Az alábbi ‘FELADAT A’-ban ezt az átfogalmazást adom meg. Ezután a ‘FELADAT A’megoldásával, illetve az ehhez szükséges komplex függvénytani ismeretekkel fogok foglalkozni.

FELADAT A. *Legyen adva egy $g(t)$ spektrálsűrűség függvény. Jellemezzük azokat a komplex számsík egységkörén értelmezett, a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztályba tartozó valós együtthatós $H(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z_k$ hatványsorokat, amelyeknek $h(\lambda)=\lim\limits_{R\to0} H(Re^{i\lambda})$ radiális limesze teljesíti az $|h^2(\lambda)|=g(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, azonosságot majdnem minden $-\pi\le\lambda\le\pi$ számra. Keressük meg az ilyen tulajdonságú függvények közül azokat, amelyekre az origóban felvett érték abszolut értéke maximális. Mely $g(\lambda)$ spektrálsűrűség esetén lesz a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvények osztálya nem üres?*

Elsősorban az origóban maximális abszolut értéket felvevő függvények előállítása érdekel minket, mert ez felel meg a Wold felbontás megtalálásának. Az a tény, hogy a Wold felbontás létezik, implikálja azt is, hogy a ‘FELADAT A’-ban megfogalmazott maximum felvétetik. Az origóban maximális abszolut értéket felvevő az adott osztályban levő függvény megtalálásában hasznos lesz számunkra a következő lemma.

Lemma. *Legyen $H(z)$ olyan analitikus függvény az egységkörben, amelyiknek van nullhelye valahol az egységkör belsejében. Ekkor létezik olyan $\bar{H}(z)$ analitikus függvény az egységkörben, amely abszolut értékének a radiális limesze megegyezik a $H(z)$ függvény abszolut értékének a radiális limeszével minden olyan pontban, ahol az utóbbi létezik, és teljesíti a $|\bar{H}(0)| > |H(0)|$ szigorú egyenlőtlenséget. Ha a $H(z)$ függvény Taylor sorának minden együtthatója valós szám, akkor a $\bar{H}(z)$ függvény megválasztható úgy, hogy az szintén teljesítse ezt a tulajdonságot.*

Bizonyítás. Ha $H(z_0) = 0$ valamely $|z_0| < 1$ pontban, akkor definiáljuk az $A(z) = \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$ függvényt. Ez olyan az egységkört önmagába képző racionális törtfüggvény, amelyik az egységkört önmagába viszi, ezért abszolut értéke a körvonal határán 1, a körvonal belsejében pedig szigorúan kisebb, mint 1. Ezért a $\bar{H}(z) = \frac{H(z)}{A(z)}$ olyan analitikus függvény, amely abszolut értékének a radiális limesze megegyezik a $H(z)$ függvény radiális limeszével az egységkör határának minden olyan pontjában, ahol ez a radiális limesz létezik. Mivel $|A(0)| < 1$, ezért $|\bar{H}(0)| > |H(0)|$. Az, hogy a $H(z)$ függvény Taylor sorának együtthatói valós számok ekvivalens azzal, hogy $\overline{H(z)} = H(\bar{z})$. Ebben az esetben a $H(z_0) = 0$ azonosságból következik, hogy $H(\bar{z}_0) = 0$. Ha $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, akkor vezessük be az előbb definiált $A(z)$ függvény mellett az $\bar{A}(z) = \frac{z-\bar{z}_0}{1-zz_0}$ függvényt is, és legyen $\bar{H}(z) = \frac{H(z)}{A(z)\bar{A}(z)}$, ha $H(z)$ valós együtthatós Taylor sor. Ez a függvény teljesíti a Lemmában előírt feltételeket.

Feltehetjük, hogy az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, Wold felbontásnak megfelelő $H_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ a ‘FELADAT A’-ban keresett függvény olyan, hogy $c_0 > 0$, azaz az origóban maximális abszolut értéket felvevő függvény az origóban pozitív értéket vesz fel. Valóban, ha a $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_k$ Wold felbontásban $c_0 < 0$ lenne akkor a Wold felbontást felírhatjuk $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-c_k)(-V_k)$ alakban is $-c_0 > 0$ együtthatóval. A $c_0 = 0$ eset nem lehetséges, hiszen mint az előző lemmában láttuk a $H_0(z)$ függvény sehol sem tűnik el az egységkörben. Továbbá azt is tudjuk a Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről szóló tétel (ii) pontja alapján, hogy a ‘FELADAT A’-ban fel kell tenni, hogy az abban tekintett $g(\vartheta)$ spektrálsűrűségnek teljesíti az $\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\, d\vartheta < \infty$ relációt. Ellenkező esetben nincsen a ‘FELADAT A’-ban előírt tulajdonságokat teljesítő függvény.

Felírom, felhasználva a komplex függvénytan néhány klasszikus eredményét felhasználva egy olyan $H_0(z)$ függvény képletét, amely természetes jelölt arra a függvényre, amely teljesíti a ‘FELADAT A’ feltételeit, és a ‘FELADAT A’ feltételeit teljesítő függvények origóban felvett értékeinek a maximuma egyenlő ennek a $H_0(z)$ függvénynek az értékével az origóban. Tudjuk az előző lemma alapján, hogy olyan $H_0(z)$ függvényt kell megadnunk, amely sehol sem tűnik el az egységkör belsejében. Ilyen függvénynek létezik logaritmusa, ezért lehetséges a keresett $H_0(z)$ függvény helyett először annak logaritmusát a $\log H_0(z)$ függvényt definiálni. Idézzük fel, hogy egy $z = Re^{i\varphi} \neq 0$ komplex számra $\log z = \log R + i\varphi$. A φ szám csak moduló 2π van meghatározva, de egy a komplex egységkörön definiált sehol sem eltünő analitikus $f(z)$ függvény $\log f(z)$ logaritmusát definiálhatjuk úgy, a nem egyértelműen meghatározott imaginárius rész alkalmas megadásával, hogy a $\log f(z)$ függvény is analitikus legyen. Az analitikus $\log H_0(z) = u(z) + iv(z)$ függvény $u(z)$ valós része harmonikus függvény. (Egy $u(x,y)$ függvény harmonikus egy G tartományon, ha a tartomány minden $(x,y) \in G$ pontjában teljesül a $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ azonosság.)

Az elmondottak alapján olyan $H_0(z)$ függvényt keresünk, amelynek $\log H_0(z) = u(z) + iv(z)$ logaritmusának $u(z) = \mathrm{Re}\,\log H(z) = \mathrm{Re}\,\log |H(z)|$ reális része teljesíti a $\lim\limits_{R\to 1} u(Re^{i\lambda}) = \frac{1}{2}\log g(\lambda)$ feltételt. Ezenkívül az $u(z)$ függvény harmonikus. Olyan $H_0(z)$ függvényt keresünk, amelyre $H_0(0)$ valós szám, és $H_0(0) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}\,\log H_0(0) = v(0) = 0$, ha a $\log H_0(z)$ logaritmusnak a megfelelő ágát vesszük. Ennek alapján felírunk egy olyan $u_0(z)$ harmonikus függvényt az egységkörön, amelynek határértéke a peremen a $\frac{1}{2}\log g(e^{i\lambda})$ függvény, majd definiáljuk ennek azt az egyértelmű analitikus $\log H(z) = u(z) + iv(z)$ analitikus kiegészítését, amelyre $v(0) = 0$. Annak érdekében, hogy megadjunk egy ilyen tulajdonságú függvényt, felidézek néhány fontos komplex függvénytani eredményt. Elsősorban a következő tételre lesz szükségünk.

Tétel az egységkör határán előírt értéket felvevő harmonikus függvények előállításáról és azok analitikus kiegészítéséről. *Legyen adva egy $u_0(\vartheta)$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, a $[-\pi,\pi]$ intervallumon integrálható függvény. Ekkor a $\{z\colon z = Re^{i\varphi},\ 0 \le R < 1\}$ egységkörön definiált*

$$\begin{aligned} u(z) = u(Re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\right) u_0(\vartheta)\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\vartheta-\varphi)} u_0(\vartheta)\,d\vartheta \end{aligned} \tag{11}$$

függvény, amelyet azonosítunk az $u(x,y) = u(x+iy) = u(z)$, ha $z = x+iy$, függvénnyel harmonikus függvény a komplex egységkörön, és ennek radiális limesze teljesíti a

$$\lim_{R\to 1} u(Re^{i\vartheta}) = u_0(\vartheta) \quad \textit{majdnem minden } -\pi \le \vartheta \le \pi \textit{ számra} \tag{12}$$

feltételt. Azt az egyértelműen meghatározott $F(z) = u(z) + iv(z)$ analitikus függvényt, amelynek valós része megegyzik a fenti $u(z)$ függvénnyel, és imaginárius része teljesíti a $v(0) = 0$ feltételt az

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z} u_0(\vartheta)\,d\vartheta \tag{13}$$

képlet adja meg.

Nem tárgyalom a fenti tétel bizonyításának a részleteit, csak felidézem azokat az alapvető eredményeket, amelyeken e tétel bizonyítása alapul. Annak bizonyítása, hogy a (11) formulában definiált $u(z)$ függvény harmonikus azon a tényen alapul, hogy a (11) formula integráljában szereplő magfüggvény, azaz a $P(R,\varphi) = \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi)}$ úgynevezett Poisson féle magfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.

Tétel a Poisson féle magfüggvény tulajdonságairól. *A* $P(R,\varphi) = \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi)}$, $0 \le R < 1$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, *Poisson féle magfüggvény, amely megadható* $P(R,\varphi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} R^{|n|}e^{in\varphi}$ *alakban is, teljesíti a következő tulajdonságokat:*

(i) A $\bar{P}(x,y) = P(R,\varphi)$, *ahol az* $R = R(x,y)$, $\varphi = \varphi(x,y)$ *számokat az* $x + iy = Re^{i\varphi}$ *reláció határozza meg, harmonikus függvény az* $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 < 1\}$ *egységkörön.*

ii) $P(R,\varphi) > 0$ *minden* $0 \le R < 1$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, *argumentumra.*

(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(R,\varphi)\,d\varphi = 1$ *minden* $0 \le R < 1$ *számra.*

(iv) $\lim\limits_{R\to 1} P(R,\varphi) = 0$, *és a konvergencia egyenletes a* $\delta \le |\varphi| \le \pi$ *halmazon minden* $\delta > 0$ *számra.*

(v) $\frac{1-R}{1+R} \le P(R,\varphi) \le \frac{1+R}{1-R}$ *minden* $0 \le R < 1$ *számra.*

A fenti eredmény segítségével belátható, hogy a (11) formulában definiált $u(z)$ függvény valóban harmonikus. Az a tény, hogy e függvény radiális limesze az $u_0(\vartheta)$ függvénnyel egyezik meg majdnem minden ϑ számra következik az alábbi az irodalomban Fatou tételnek nevezett fontos eredményből, amelyet szintén bizonyítás nélkül ismertetek.

Fatou tétel. *Legyen* μ *korlátos változású mérték az egység körvonalon. Akkor az*

$$u(Re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\vartheta-\varphi)}\mu(\,d\vartheta) \tag{14}$$

(Poisson) integrál teljesíti a

$$\lim_{R\to 1} u(Re^{i\varphi}) = \mu'(\varphi)$$

relációt a $\mu'(\varphi) = \lim \frac{\mu(I)}{\lambda(I)}$ *határértékkel, ahol az* I *intervallumrendszer tetszőleges az* $e^{i\varphi}$ *pontra húzódó körívek rendszere, minden olyan* $e^{i\varphi}$ *pontban, amelyikben a fenti* $\mu'(\varphi)$ *határérték létezik.*

Nem a (11) formulával definiált függvény az egyetlen egységkörön harmonikus függvény, amely teljesíti a (12) feltételt. Valóban, ha tekintünk tetszőleges az egységkörvonalon definiált korlátos változású szinguláris μ mértéket, akkor nem nehéz belátni a Fatou tétel segítségével, hogy

$$v(z) = u(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\vartheta-\varphi)}\mu(\,d\vartheta)$$

szintén a (12) feltételt teljesítő harmonikus függvény. Célunk annak megmutatása, hogy amennyiben a (11) formulában definiált $u(z)$ függvényt tekintjük $u_0(\vartheta) = \frac{1}{2}\log g_0(\vartheta)$

választással, majd ennek a (13) formulában bevezetett analitikus kiegészítését, akkor ez a függvény választható annak a $H_0(z)$ függvény $\log H_0(z)$ logaritmusának, amely teljesíti a 'FELADAT A' feltételeit, sőt az is igaz rá, hogy az origóban felvett értéke egyenlő azon függvények origóban vett értékei abszolut értékének a maximumával, amelyek teljesítik a 'FELADAT A' feltételeit. Ez azt jelenti, hogy a (11) formulában definiált függvényhez hozzáadhatnánk még a Poisson magfüggvénynek egy szinguláris mérték szerinti integrálját, és ilyen módon is egy a 'FELADAT A' feltételeit teljesítő függvényt kapnánk, de ezt nem érdemes tenni.

Azt kívánjuk belátni, hogy a 'FELADAT A' feltételeit teljesítő függvények közül a

$$H_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\frac{1}{2}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\} \tag{15}$$

függvény az optimális megoldás.

Először azt kell megmutatni, hogy a (15) formulában definiált $H_0(z)$ függvény teljesíti a 'FELADAT A' feltételeit. A függvény konstrukciójából világos, hogy $H_0(z)$ az egységkörön analitikus függvény, amelyre teljesül a $\lim\limits_{R\to 1}|H_0(Re^{i\vartheta})|^2 = g(\vartheta)$ reláció. Továbbá, abból hogy $g(\vartheta) = g(-\vartheta)$ következik, hogy $\log H_0(\bar z) = \overline{\log H_0(z)}$, ahonnan $H_0(\bar z) = \overline{H_0(z)}$, és $H_0(z)$ Taylor sorának együtthatói valós számok. Viszont be kell még látnunk azt, hogy a (15) formulában definiált $H_0(z)$ függvény eleme a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztálynak. Ennek az állításnak a helyességét mondja ki az alábbi Lemma.

Lemma. *Legyen $g(\vartheta)$ olyan függvény a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, amely majdnem mindenütt nagyobb, mint nulla, $\int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta < \infty$ és $\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(\vartheta)|\,d\vartheta < \infty$. Ekkor a (15) képletben definiált $H_0(z)$ függvény teljesíti az*

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |H_0(Re^{i\varphi})|^2\,d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\}d\varphi\\ &\le \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta\end{aligned}$$

egyenlőtlenséget minden $0 < R < 1$ számra.

Bizonyítás. Definiáljuk rögzített $-\pi \le \varphi \le \pi$ és $0 < R < 1$ számokra a $\mu(\,d\vartheta) = \mu_\varphi(\,d\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\,d\vartheta$ mértéket a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. A Poisson féle magfüggvény tulajdonságairól szóló tétel (iii) pontja szerint μ valószínűségi mérték. Ezért alkalmazva az $\exp\{\int f(\vartheta)\,d\mu(\vartheta)\} \le \int \exp\{f(\vartheta)\}\,d\mu(\vartheta)$ Jensen egyenlőtlenséget a (konvex) exponenciális és az $f(\vartheta) = \log g(\vartheta)$ függvényre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\}d\varphi\\ &\quad\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}g(\vartheta)\,d\vartheta, \quad -\pi\le\varphi\le\pi. \qquad (+)\end{aligned}$$

Integrálva ezt az egyenlőtlenséget φ szerint kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_0(Re^{i\varphi})|^2\, d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)} g(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Felcserélve az integrálás sorrendjét az utolsó egyenlőtlenség jobboldalán, és felhasználva, hogy $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\, d\varphi = 1$ minden $-\pi \le \vartheta \le \pi$ számra, kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_0(Re^{i\varphi})|^2\, d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta \quad \text{minden } 0 < R < 1 \text{ számra,}$$

és ezt kellett bizonyítani.

Láttuk, hogy a (15) formulában definiált $H_0(z)$ függvény teljesíti a 'FELADAT A' feltételeit. Ezenkívül ebből a formulából következik az is, hogy

$$\log |H_0(0)| = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(\vartheta)|\, d\vartheta. \tag{16}$$

Felhasználjuk ezenkívül a következő fontos komplex függvénytani eredményt, a Szegő tételt, amelynek hátterét a kiegészítésben ismertetem.

Szegő tétel. *Legyen $f(z)$, $|z| < 1$, egy a $\mathcal{H}_2$ (vagy általánosabban egy $\mathcal{H}_p$, $0 < p \le \infty$,) Hardy osztályban szereplő analitikus függvény, és legyen $\tilde f(\vartheta) = \lim\limits_{R\to 1} f(Re^{i\vartheta})$ e függvény radiális limesze. Ekkor teljesül a*

$$\log |f(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\tilde f(\vartheta)|\, d\vartheta, \tag{17}$$

illetve általánosabban

$$\log |f(Re^{i\varphi})| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\vartheta-\varphi)} \log |\tilde f(\vartheta)|\, d\vartheta \tag{17'}$$

egyenlőtlenség.

Mivel a 'FELADAT A'-ban olyan $\mathcal{H}_2$ osztálybeli függvényeket kerestünk, amelyek radiális limeszeinek abszolut értéke $|g(\vartheta)|^{1/2}$, ezért összehasonlítva a (16) és (17) formulákat, kapjuk, hogy $|f(0)| \le H_0(0)$ minden a 'FELADAT A' feltételeit teljesítő $f(z)$ függvényre. Ez azt jelenti, hogy a (15) formulában definiált $H_0(z)$ függvény Taylor sorának együtthatói adják meg az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, Wold felbontásban szereplő c_k együtthatókat. Ezután a 2B. lemma felhasználásával meg lehet adni magát a Wold felbontást is egy véletlen spektrál mérték szerinti integrál segítségével, bár felmerül a kérdés, hogy nincsen-e egyszerűbb, jobban használható eljárás a Wold felbontás kiszámítására.

Megkaptuk annak szükséges és elégséges feltételét is, hogy mikor oldható meg a 'FELADAT A'. Ez egyben megadja annak szükséges és elégséges feltételét is, hogy egy stacionárius sorozat reguláris legyen. Így megkaptuk a következő eredményt is.

Tétel reguláris stacionárius sorozatok jellemzéséről. *Egy X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, stacionárius (Gauss) sorozat akkor és csak akkor reguláris, ha létezik $g(\vartheta)$ spektrálsűrűség függvénye, és az teljesíti az*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\, d\vartheta < \infty$$

egyenlőtlenséget.

Megjegyzem, hogy általában a fenti tétel feltételében szereplő integrál végességét a vele ekvivalens $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta > -\infty$ alakban szokták kimondani. Az $\int g(\vartheta)\, d\vartheta = EX_1^2 < \infty$, $g(\vartheta) \geq 0$ relációk alapján könnyen látható, hogy a két feltétel ekvivalens.

Érvényes a fenti tétel következő élesítése is, amely megadja egy adott spektrálmértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamat felbontását a sorozatnak alárendelt ortogonális reguláris és szinguláris stacionárius sorozatok összegére.

Tétel stacionárius sorozatok felbontására reguláris és szinguláris komponensekre. *Tekintsük egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat G spektrál mértékének $G = G_1 + G_2$, felbontását abszolut folytonos és szinguláris komponensek összegére, ahol G_1 a G mérték abszolut folytonos komponense $g(\vartheta) = \frac{dG_1(\vartheta)}{d\vartheta}$ sűrűségfüggvénnyel, és G_2 a G mérték szinguláris komponense, azaz olyan (véges) mérték, amely egy null Lebesgue mértékű halmazban van koncentrálva. Jelölje $A = D(G_2) \subset [-\pi, \pi]$ a G_2 szinguláris mérték tartóját, azaz azt a legszűkebb (nulla Lebesgue mértékű) zárt halmazt, amelyre $G_2([-\pi, \pi] \setminus D) = 0$.*

Az X_n stacionárius sorozat szinguláris, ha $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta = -\infty$. A másik esetben, ha $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta > -\infty$, akkor az X_n sorozatot előállító Z_G véletlen spektrál mérték szerinti integrál segítségével az X_n sorozat felírható $X_n = U_n + V_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, alakban, ahol U_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, reguláris és V_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, szinguláris, az X_n sorozatnak alárendelt stacionárius sorozat, és az U_n és V_n sorozatok ortogonálisak, azaz $EU_m V_n = 0$, $n, m = 0, \pm 1, \dots$. Ez a felírás a következő: Ha $X_n = \int e^{in\vartheta} Z_G(\,d\vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \dots$, akkor $U_n = \int e^{in\vartheta} I_{[-\pi,\pi]\setminus D}(t) Z_G(\,d\vartheta)$, $V_n = \int e^{in\vartheta} I_D(t) Z_G(\,d\vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \dots$, ahol $I_A(t)$ egy A halmaz indikátor függvényét jelöli.

E fenti tétel bizonyításának nem dolgozom ki minden részletét. Az a reguláris stacionárius sorozatok jellemzéséről valamint a stacionárius sorozatok a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére való felbontásáról szóló tételek, illetve ez utóbbi tételben szereplő felbontás (itt nem ismertetett, de egyszerű, viszont nem konstruktív) előállításán alapul.

Ha egy X_n stacionárius sorozat G spektrálmértéke olyan, hogy az abszolut folytonos komponens $g(\vartheta)$ spektrálsűrűségére az $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta = -\infty$ reláció érvényes, akkor tekintve e sorozat tetszőleges $X_n = U_n + V_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, felbontását két független

(Gauss) stacionárius sorozat összegére valamely $G^{(1)}$ és $G^{(2)}$ (nem zéró) spektrálmértékkel, akkor ezen spektrálmértékek $g^{(1)}(\vartheta)$ és $g^{(2)}(\vartheta)$ sűrűségfüggvénye kisebb, mint $g(\vartheta)$, ezért egyikük sem lehet reguláris. Így a stacionárius sorozatok a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére való felbontásáról szóló tétel alapján az X_n stacionárius sorozat ebben az esetben szinguláris.

Ha az X_n sorozat G spektrálmértéke olyan, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta > -\infty$, akkor nem nehéz belátni, hogy a tételben megadott $X_n = U_n + V_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$ azonosság az X_n sorozat felbontását adja két korrelálatlan stacionárius sorozat összegére, amelyek közül az U_n sorozat reguláris, a V_n sorozat szinguláris. Viszont meg kell mutatni azt is, hogy ezek a sorozatok alá vannak rendelve az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatnak. Ennek indoklásában alkalmazzuk a stacionárius sorozatok a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére való felbontásáról szóló tétel bizonyításának (itt nem ismertetett) konstrukcióját.

Tekintsük az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, valószínűségi változók lineáris kombinációi által kifeszített H_∞ Hilbert teret, illetve annak az (1) formulában definiált S alterét. Vegyük mindegyik X_n valószínűségi változó S altérre vett vetületének $\tilde U_n$ ortogonális kiegészítőjét. Ekkor be lehet látni, (ez az említett tétel bizonyításának a kulcslépése), hogy az $\tilde U_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozat az X_n sorozatnak alárendelt reguláris stacionárius sorozat. Ezenkívül a H_∞ Hilbert térnek az $\tilde U_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozat elemei által generált altere megegyezik az S altér ortogonális kiegészítésével. Be lehet látni, felhasználva azt, hogy mivel $\tilde U_n$ az X_n sorozatnak alá van rendelve, és 'ugyanaz a shift operátor hat rá', ezért az felírható $\tilde U_n = \int e^{in\vartheta} h(\vartheta) Z_G(\, d\vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \dots$, alakban alkalmas $h(\vartheta)$ magfüggvénnyel. Mivel a (reguláris) $\tilde U_n$ sorozatnak van spektrálsűrűség függvénye, ezért a $h(\vartheta)$ magfüggvény a $[-\pi, \pi] \setminus D$ halmazba van koncentrálva, így az $\tilde U_n$ és V_n, $n = 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatok ortogonálisak. Innen következik, hogy a V_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sorozat elemei az S altérben vannak, ezért ez a sorozat az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatnak alá van rendelve. Akkor viszont ugyanez igaz a $V_n = X_n - U_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatra is. A tétel bizonyítását befejeztük.

Röviden beszélek a 'FELADAT A' általános megoldásáról. Ha összehasonlítjuk a (15) formulát a Szegő tételben szereplő (17′) képlettel, azt kapjuk, hogy a 'FELADAT A' tetszőleges $f(z)$ megoldása teljesíti az $|f(Re^{i\vartheta})| \le H_0(Re^{i\vartheta})$ egyenletet minden $0 \le R < 1$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, paraméterre. Ebből, illetve abból a tényből, hogy a $H_0(z)$ függvény sehol sem tűnik el az egységkör belsejében következik, hogy a 'FELADAT A' minden megoldása felírható $f(z) = H_0(z) g(z)$ alakban, ahol $H_0(z)$, amelyet a (feladat feltételeit teljesítő) külső függvénynek neveznek a (15) képletben van megadva, míg a $g(z)$ függvény, amelyet belső függvénynek neveznek, olyan függvény, amelynek abszolut értéke az egységkör belsejében kisebb, mint 1, az egységkörvonalon vett határértéke pedig 1. A maximum elv segítségével be lehet látni, hogy ha $g(z)$ nem egyenlő egy 1 abszolut értékű konstanssal minden z számra, akkor $g(z)$ abszolut értéke szigorúan kisebb, mint 1 az egységkör minden belső pontjában. Innen az is következik, hogy az origóban maximális abszolut értéket felvevő a 'FELADAT A' feltételeit teljesítő függvény egy esetleges (-1) számmal való szorzást nem tekintve egyértelműen meg van határozva. Ezért $H_0(z)$ valóban a stacionárius sorozat Wold felbontásának felel meg.

A belső függvényeket és ezáltal a 'FELADAT A' teljes megoldásrendszerét pontosan le lehet írni. Elmagyarázom, hogy milyen alakú lehet egy belső függvény, de a bizonyítás részleteit nem tárgyalom.

Egy tipikus belső függvény olyan $g(z) = \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$, $|z_0| < 1$, racionális törtfüggvény, amely az egységkört önmagába képezi. Tekinthetjük ilyen függvények szorzatát is. Tudjuk, hogy egy nem azonosan nulla analitikus függvény null-helyeinek nem lehet torlódási pontja az értelmezési tartomány belsejében. Viszont a null-helyek torlódhatnak az értelmezési tartomány (jelen esetben az egységkör) valamely határpontjához. Ezt a lehetőséget kihasználva lehet végtelen, úgynevezett Blaschke szorzatok segítségével definiálni belső függvényeket.

Más tipusú belső függvényt kaphatunk úgy, hogy egy $R(z) = c\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}$, $c > 0$, alakú függvényt veszünk, azaz az egységkör egy racionális törtfüggvény leképezését tekintjük a $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ félsíkra, majd definiáljuk a $h(z) = e^{R(z)}$ függvényt. A $h(z)$ függvény az egységkör olyan leképezése önmagába, amelynek egyetlen pontban nincsen radiális limesze, az $R(z)$ racionális törtfüggvénynek az egységkörvonal határán levő $z = e^{i\vartheta}$ szinguláris pontjában. A $h(z)$ függvény az egységkör olyan leképezése önmagára, amely az egységkör belsejében sehol sem tűnik el. Ilyen függvények szorzataként, illetve a szorzatok limeszét véve további belső függvényeket tudunk definiálni. Ilyen módon

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\mu(\vartheta)\right\}$$

alakú belső függvényeket kapunk, ahol μ szinguláris mérték. Az, hogy az ilyen függvények abszolut értékének a radiális limesze majdnem minden pontban 1 megmutatható a Fatou tétel segítségével. Az ilyen alakú belső függvényeket szinguláris belső függvénynek nevezik. Be lehet látni, hogy tetszőleges belső függvény előállítható egy Blaschke szorzat és egy szinguláris belső függvény szorzataként, és ez az előállítás egy 1 abszolut értékű tényező erejéig egyértelmű.

A Wold felbontást felírhatjuk $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k W_{n-k}$, $n = \dots,-1,0,1,\dots$, alakban, ahol a c_k együtthatók az előbb tárgyalt $H_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ függvény Taylor együtthatói, a W_k valószínűségi változókat pedig a (9) képlet definiálja, azzal a kiegészítéssel, hogy a képletben szereplő $h(t)$ függvény a $H_0(z)$ függvény $H_0(e^{it})$, $-\pi \le t \le \pi$, radiális limesze. Felmerülhet az igény, hogy a (9) képletben definiált véletlen integrál kiszámítására találjunk egyszerűbb, jobban számolható módszert. Érdemes észrevenni, hogy mivel a $H_0(z)$ függvény nem tűnik el az egységkör belsejében, ennek reciproka szintén analitikus függvény az egységkörben, amely felírható $\frac{1}{H_0(z)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k z^k$ alakban, és az $\frac{1}{h(t)}$ ennek a függvénynek a radiális limesze. Ez azt sugallja, hogy $\frac{1}{h(t)}$ függvény felírható $\frac{1}{h(t)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k e^{ikt}$ alakban, ezért a (9) formula alapján

$$W_n = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\overline{h(t)}}e^{int}Z_G(dt) = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{i(n-k)t}Z_G(dt) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k X_{n-k}.$$

Az előbbi számolás megadja, legalábbis formális szinten azt, hogy hogyan lehet kiszámolni a Wold felbontásban szereplő W_n valószínűségi változókat az ismert X_j, $j \le n$, valószínűségi változók segítségével. Vegyük észre, hogy ebben a számolásban is kihasználtuk, hogy a $H_0(z)$ függvény nem tűnik el az egységkör belsejében. Ez biztosítja azt, hogy az $\frac{1}{H_0(z)}$ függvény analitikus az egységkör belsejében, és a radiális limesze az egységkör határán megegyezik az $\frac{1}{h(t)}$ függvénnyel.

Valójában a probléma nehezebb, és a fenti gondolatmenet csak heurisztikus érvelésnek tekinthető. A probléma az, hogy az $\lim\limits_{R\to 1} \frac{1}{H_0(Re^{i\vartheta})} = \frac{1}{h_0(e^{i\vartheta})}$ relációt csak a majdnem minden konvergencia értelemben tudjuk, míg az előbbi közelítés Wold felbontásban szereplő valószínűségi változóhoz való konvergenciának igazolásához a

$$\lim_{R\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{H_0(Re^{i\vartheta})} - \frac{1}{h_0(e^{i\vartheta})} \right|^2 g(\vartheta)\, d\vartheta = 0$$

reláció igazolására lenne szükségünk. (Ekkor a sztochasztikus integrálok L_2 izomorfiájából következik az állítás.) Egy speciális példában később megmutatjuk, hogy a fent ismertetett közelítés segítségével megkaphatjuk a példában szereplő stacionárius folyamat Wold felbontását. A példában ismertetett módszer általánosítható tetszőleges úgynevezett ARMA folyamat Wold felbontásának az előállítására, (az ARMA folyamatokat nemsokára definiálni fogom), de nyitva hagyja azt a kérdést, hogy az előbb tárgyalt heurisztikus eljárás alkalmas-e tetszőleges reguláris folyamat Wold felbontásának az előállítására.

Külön foglalkozom két különböző gyakorlati alkalmazásokban fontos speciális stacionárius folyamattal, a 'Moving Average' (mozgó átlag) és 'ARMA' (autoregressive moving average) folyamattal. Ezen folyamatok spektrálsűrűsége speciális alakban írható fel. A spektrálsűrűség ezekben a modellekben az $e^{i\lambda}$ függvény speciális alakú függvénye. Ez a speciális alakú függvény egy polinom, illetve egy racionális törtfüggvény abszolut értékének a négyzetével egyenlő. Ez a polinom, illetve racionális törtfüggvény nincs egyértelműen meghatározva, és érdemes megkeresni annak legjobban használható alakját. A 'Moving Average' és 'ARMA' folyamat spektrálsűrűségének speciális alakja miatt e modellekben viszonylag egyszerűen megoldható a FELADAT A'-ban megfogalmazott probléma, ezért ebben az esetben a predikciós probléma vizsgálata kevésbé nehéz.

Megadom a Moving Average és ARMA folyamatok definicióját, és kiszámolom ezek spektrál sűrűségfüggvényét.

Legyen $\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, és rögzítsük $a_0, a_1, \dots, a_k$ valós számok egy sorozatát. Az

$$X_n = \sum_{p=0}^{k} a_p \varepsilon_{n-p}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{18}$$

sorozatot k-ad rendű mozgó átlagnak nevezzük. (Itt a korábban bevezetett mozgó átlag speciális esetét tekintettük, mert a (18) formulában csak véges összegeket vettünk.) Az

X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozat $g(t)$ spektrálsűrűség függvényét megadhatjuk $g(t) = \frac{1}{2\pi}|P(e^{it})|^2$ alakban, ahol $P(z) = \sum\limits_{p=0}^{k} a_p z^p$. Ezt a képletet az alábbi (tulajdonképp már általánosabb esetben elvégzett) számolás adja.

$$
\begin{aligned}
EX_l X_{l+n} &= \sum_{p=0}^{k} \sum_{p'=0}^{k} a_p a_{p'} E\varepsilon_{l-p}\varepsilon_{n+l-p'} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{p=0}^{k} a_p e^{-i(l-p)t} \right) \left(\sum_{p'=0}^{k} a_{p'} e^{i(n+l-p')t} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \left| \sum_{p=0}^{k} a_p e^{i(l-p)t} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} |P(e^{it})|^2 \, dt,
\end{aligned}
$$

és $g(t) = g(-t)$ a $g(t) = |P(e^{it})|^2$ függvényre.

Legyen adva az előbb tekintett $\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók és az $a_0, a_1, \dots, a_k$ valós számok sorozatán kívül még valós számok egy másik $b_1, \dots, b_l$ sorozata is. Azt mondjuk, hogy az (együttesen) normális eloszlású Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, valószínűségi változók stacionárius sorozata (k, l) rendű ARMA folyamat, ha teljesíti a

$$
\sum_{q=0}^{l} b_q Y_{n-q} = \sum_{p=0}^{k} a_p \varepsilon_{n-p}, \quad , n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{19}
$$

azonosságot. Probáljuk meg kiszámolni az Y_n stacionárius sorozat $g(\lambda)$ spektrálsűrűség függvényét (feltéve, hogy létezik az adott tulajdonságú stacionárius sorozat és annak van spektrálsűrűség függvénye). Vezessük be a $Z_n = \sum\limits_{q=0}^{l} b_q Y_{n-q}$, $n = \dots, -1, 0, 1 \dots$, stacionárius sorozatot. Az előző számoláshoz hasonlóan felírhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
EZ_s Z_{s+n} &= \sum_{q=0}^{l} \sum_{q'=0}^{l} b_q b_{q'} EZ_{-q} Z_{n-q'} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{q=0}^{l} b_q e^{iqt} \right) \left(\sum_{q'=0}^{k} b_{q'} e^{i(n-q')t} \right) g(t) \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \left| \sum_{q=0}^{l} b_q e^{iqt} \right|^2 g(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} |R(e^{it})|^2 g(t) \, dt,
\end{aligned}
$$

ahol $R(z) = \sum\limits_{q=0}^{l} b_q z^q$.

Összehasonlítva a (19) formula bal és jobb oldalán szereplő kifejezések kovariancia függvényére kapott kifejezéseket azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}|R(e^{it})|^2 g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}|P(e^{it})|^2\,dt.$$

Mivel ennek az azonosságnak minden $n = 0, \pm1, \dots$ számra teljesülnie kell, innen következik, hogy $g(t) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{P(e^{it})}{R(e^{it})}\right|^2$.

Felírtuk a moving average és ARMA folyamat spektrálsűrűségét $g(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2$, illetve $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ alakban. Az ezekben a kifejezésekben szereplő polinomoknak lehet gyökük az egységkör belsejében is. A következő lemmában megadjuk egy ilyen alakú spektrálsűrűség függvény egy esetleg különböző előállítását, amelyben olyan polinomok szerepelnek, amelyeknek nincs gyökük az egységkör belsejében. Ez lehetővé teszi, hogy egyszerű módon előállítsuk azt a (15) formulában definiált, a $g(\lambda)$ spektrálsűrűség függvénytől függő $H_0(z)$ függvényt, amely megadja egy $g(\lambda)$ spektrálsűrűséggel rendelkező stacionárius sorozat Wold felbontásában szereplő együtthatókat.

Lemma Moving Average és ARMA folyamatok spektrálsűrűség függvényének reprezentációjáról. *Legyen adva egy olyan stacionárius sorozat, amelynek $g(\lambda)$ spektrálsűrűség függvénye felírható $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ alakban alkalmas $P(z)$ és $R(z)$ polinomokkal. Ekkor léteznek olyan $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomok, amelyeknek nincs gyökük a $\{z\colon |z| < 1\}$ komplex egységkörben, és $g(\lambda) = \left|\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})}{\tilde{R}(e^{i\lambda})}\right|^2$. A $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomok együtthatói valós számok, és feltehető, hogy $0 < \frac{\tilde{P}(0)}{\tilde{R}(0)} < \infty$. A $g(\lambda)$ spektrálsűrűség függvényhez tartozó 'Feladat A'-nak a (15) formulában megadott extremális megoldása a $H_0(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ függvény.*

Bizonyítás. Legyenek a $g(\lambda)$ spektrálsűrűség függvényének előállításaban szereplő $P(z)$ és $R(z)$ polinomok nem zéró gyökei $v_1, \dots, v_m$ és $w_1, \dots, w_n$. Ekkor

$$g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2 = \frac{P(e^{i\lambda})\overline{P(e^{i\lambda})}}{R(e^{i\lambda})\overline{R(e^{i\lambda})}} = C^2\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}(e^{i\lambda} - v_k)(e^{-i\lambda} - \bar{v}_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{i\lambda} - w_k)(e^{-i\lambda} - \bar{w}_k)} \tag{20}$$

valamely alkalmas $C > 0$ számmal.

Defindruáljuk a $\tilde{v}_k = v_k$, ha $|v_k| \ge 1$, $\tilde{v}_k = \frac{1}{\bar{v}_k}$, ha $|v_k| < 1$, $1 \le k \le m$, számokat és a $\tilde{P}(z) = \frac{1}{A}\prod\limits_{k=1}^{m}(z - \tilde{v}_k)$ polinomot, ahol $A = \prod\limits_{k\colon |v_k|<1} |v_k|$. Definiáljuk hasonló módon a $\tilde{w}_k = w_k$, ha $|w_k| \ge 1$, $\tilde{w}_k = \frac{1}{\bar{w}_k}$, ha $|w_k| < 1$, $1 \le k \le n$, számokat és a $\tilde{R}(z) = \frac{1}{B}\prod\limits_{k=1}^{m}(z - \tilde{w}_k)$ polinomot, ahol $B = \prod\limits_{k\colon |w_k|<1} |v_k|$. Pontosabban a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$

polinomokat úgy definiáljuk, hogy az előbb bevezetett $\tilde{P}(z)$ illetve $\tilde{R}(z)$ polinomokból elhagyjuk azokat a $(z-\tilde{v}_k)$ és $(z-\tilde{w}_k)$ tényezőket, amelyekre $\tilde{v}_k=\tilde{w}_k$. Ilyen módon a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ racionális törtfüggvény értékét nem változtattuk meg. (Ezt a módosítást azért tettük a definicióban, mert lehetnek olyan (v_k,w_k) gyökpárok, amelyekre $v_k=\frac{1}{w_k}$. Ebben az esetben a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ racionális törtfüggvény egyszerűsíthető, és ezt a lehetőséget ki akartuk használni.)

A $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomoknak nincs gyökük a komplex egységkör belsejében. Azt állítom, hogy a $\left|\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})}{\tilde{R}(e^{i\lambda})}\right|^2=\left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2=g(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, azonosság is teljesül. Valóban,

$$\left|\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})}{\tilde{R}(e^{i\lambda})}\right|^2=\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{i\lambda})}}{\tilde{R}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{i\lambda})}}=\frac{B^2C^2}{A^2}\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}(e^{i\lambda}-\tilde{v}_k)(e^{-i\lambda}-\bar{\tilde{v}}_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{i\lambda}-\tilde{w}_k)(e^{-i\lambda}-\bar{\tilde{w}}_k)}, \tag{20'}$$

ezért a kívánt összefüggést megkapjuk összehasonlítva a (20) és (20′) formulákat és bebizonyítva az $(e^{i\lambda}-\tilde{v}_k)(e^{-i\lambda}-\bar{\tilde{v}}_k)=\frac{1}{|v_k|^2}(e^{i\lambda}-v_k)(e^{-i\lambda}-\bar{v}_k)$, ha $|v_k|<1$, illetve $(e^{i\lambda}-\tilde{w}_k)(e^{-i\lambda}-\bar{\tilde{w}}_k)=\frac{1}{|w_k|^2}(e^{i\lambda}-w_k)(e^{-i\lambda}-\bar{w}_k)$, ha $|w_k|<1$ azonosságokat.

Viszont

$$\begin{aligned}(e^{i\lambda}-\tilde{v}_k)(e^{-i\lambda}-\bar{\tilde{v}}_k)&=\left(e^{i\lambda}-\frac{1}{\bar{v}_k}\right)\left(e^{-i\lambda}-\frac{1}{v_k}\right)=\frac{1}{|v_k|^2}(\bar{v}_ke^{i\lambda}-1)(v_ke^{-i\lambda}-1)\\&=\frac{1}{|v_k|^2}|\bar{v}_ke^{i\lambda}-1|^2=\frac{1}{|v_k|^2}|\bar{v}_k-e^{-i\lambda}|^2\\&=\frac{1}{|v_k|^2}(e^{i\lambda}-v_k)(e^{-i\lambda}-\bar{v}_k),\end{aligned}$$

ha $|v_k|\le 1$. A másik bizonyítandó azonosság hasonlóan igazolható.

Belátjuk, hogy a $g(\lambda)$ spektrálsűrűség függvény $g(\lambda)=g(-\lambda)$ szimmetriájából következik, hogy $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ valós együtthatós polinomok. Ennek érdekében először azt látjuk be, hogy az adott feltételből következik az is, hogy

$$\tilde{P}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{i\lambda})}=\tilde{P}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{-i\lambda})},\qquad \tilde{R}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{i\lambda})}=\tilde{R}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{-i\lambda})},$$

illetve belátjuk a (formálisan) kissé általánosabb

$$\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{P}(z),\qquad \tilde{R}(z)\hat{R}\left(\frac{1}{z}\right)=\tilde{R}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{R}(z) \tag{21}$$

egyenlőtlenséget, ahol $\hat{P}(z)=\prod\limits_{k=1}^{m}(z-\bar{\tilde{v}}_k)$, $\hat{R}(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\bar{\tilde{w}}_k)$, és a $\tilde{v}_1,\dots\tilde{v}_m$ számok a $\tilde{P}(z)$, a $\tilde{w}_1,\dots\tilde{w}_n$ számok pedig a $\tilde{R}(z)$ polinom gyökei.

A $g(\lambda)=\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{i\lambda})}}{\tilde{R}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{i\lambda})}}=\frac{\tilde{P}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{-i\lambda})}}{\tilde{R}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{-i\lambda})}}=g(-\lambda)$ azonosságból analitikus kiterjesztéssel azt kapjuk, hogy $\frac{\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)}{\tilde{R}(z)\hat{R}\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{\tilde{P}(\frac{1}{z})\hat{P}(z)}{\tilde{R}(\frac{1}{z})\hat{R}(z)}$. Az utolsó azonosság két oldalán szereplő kifejezések gyökhelyei a $\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_m,\frac{1}{\bar{\tilde{v}}_1},\dots,\frac{1}{\bar{\tilde{v}}_m}$ illetve az $\frac{1}{v_1},\dots,\frac{1}{v_m},\bar{\tilde{v}}_1,\dots,\bar{\tilde{v}}_m$ számok. Igaz az is, hogy a $\{\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_m,\frac{1}{\bar{\tilde{v}}_m},\dots,\frac{1}{\bar{\tilde{v}}_m}\}$ és $\{\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_n,\frac{1}{\bar{\tilde{w}}_1},\dots,\frac{1}{\bar{\tilde{w}}_n}\}$, halmazok diszjunktak, azaz a vizsgált kifejezések gyökei és pólusai különböznek, és a felsorolt gyökök valóban megjelennek. Innen következik, hogy $\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\tilde{P}(\frac{1}{z})\hat{P}\left(z\right)$, azaz érvényes a (21) formula első relációja. De akkor igaz a (21) formula második relációja is.

A $\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény gyökhelyei közül a $\tilde{P}(z)$ polinom tartalmazza az 1-nél nagyobb, a $\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény az 1-nél kisebb abszolut értékűeket. Ha egy v számra $|v|=1$, és a v szám nullhelye vagy a $\tilde{P}(z)$ vagy a $\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvénynek, akkor ez a $v=\frac{1}{\bar{v}}$ szám gyöke a másik függvénynek is. Ez azt jelenti, hogy az 1 abszolut értékű gyökök párba állíthatóak úgy, hogy egyikük a $\tilde{P}(z)$, a másikuk pedig a $\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvénynek a gyöke. Hasonló tulajdonsága van a $\tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{P}(z)$ függvénynek is. Ez azt jelenti, hogy a (21) formula alapján a $\tilde{P}(z)$ és $\hat{P}(z)$ polinomnak ugyanazok a gyökei. Innen az is következik, hogy a $\tilde{P}(z)$ polinom megszorítása a valós számegyenesre teljesíti a $\tilde{P}(y)=\overline{\tilde{P}(y)}$ azonosságot, ezért $\tilde{P}(z)$ valós együtthatójú polinom. Hasonlóan látható, hogy az $\tilde{R}(z)$ polinom valós együtthatós. Esetleges (-1)-gyel való szorzással elérhetjük azt is, hogy $0<\frac{\tilde{P}(0)}{\tilde{R}(0)}<\infty$.

Láttuk, hogy $h_0(z)=\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ olyan valós együtthatós analitikus függvény a komplex egységkörben, (ennek érdekében biztosítanunk kellett azt, hogy az $\tilde{R}(z)$ függvénynek ne legyen gyöke az egységkör belsejében), amelynek létezik olyan $h_0(e^{i\vartheta})$ radiális limesze, amely teljesíti az $|h_0(e^{i\vartheta})|^2=g(\vartheta)$ azonosságot. Be lehet látni közvetlenül, hogy a $h_0(z)$ függvény eleme a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztálynak. Innen következik, hogy ez a $h_0(z)$ függvény a 'FELADAT A' egyik megoldása. Egy ennél tartalmasabb állítást fogunk igazolni. Megmutatjuk, hogy $h_0(z)=\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ megegyezik a (15) relációban a $\frac{1}{2}\log g(\vartheta)=\log\tilde{P}(e^{i\vartheta})-\log\tilde{R}(e^{i\vartheta})$, $-\pi\le\vartheta\le\pi$, függvény segítségével definiált $H_0(z)$ függvénnyel. Ebből az állításból az is következik, hogy a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ a 'FELADAT A' optimális, a Wold felbontásnak megfelelő megoldása. (Ennek az optimális megoldásnak a megtalálása érdekében biztosítanunk kellett azt, hogy a $\tilde{P}(z)$ polinomnak nincs gyöke az egységkörben.)

Azt kell megmutatnunk, hogy a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ racionális törtfüggvény teljesíti a (15) relációban felírt azonosságot az $\frac{1}{2}\log g(\vartheta)=\log|\tilde{P}(e^{i\vartheta})|-\log|\tilde{R}(e^{i\vartheta})|$, $-\pi\le\vartheta\le\pi$, függvénnyel. Először megmutatom, hogy a kívánt összefüggés következik az

$$\log\left(\frac{Re^{i\varphi}-z_0}{-z_0}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}\log\left|\frac{e^{i\vartheta}-z_0}{-z_0}\right|\,d\vartheta\quad\text{ha } 0\le R<1 \tag{22}$$

azonosságból, amely érvényes minden olyan z_0 számra, amelyre $|z_0|\ge1$. (A (22) reláció érvényességének érdekében fel kell tennünk, hogy $|z_0|\ge1$.) Ezután bebizonyítjuk a (22) azonosságot.

Összegezzük a (22) formulát minden $z_0 = \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m$ illetve minden $z_0 = \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$ számra, ahol $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m$, illetve $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$, a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinom gyökei. Vonjuk ki a két azonosságot egymásból. Ezután némi átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{P(Re^{i\varphi})}{R(Re^{i\varphi})} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}\frac{1}{2}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\} \quad \text{ha } 0 \le R < 1. \tag{23}$$

Azt kell észrevenni a (23) azonosság igazolásához, hogy a $\frac{\tilde{v}_1\cdots\tilde{v}_m\tilde{w}_1^{-1}\cdots\tilde{w}_n^{-1}}{|\tilde{v}_1\cdots\tilde{v}_m\tilde{w}_1^{-1}\cdots\tilde{w}_n^{-1}|}$ tört értéke $+1$ vagy -1, mert mind a $\tilde{v}_1\cdots\tilde{v}_m$, mind a $\tilde{w}_1\cdots\tilde{w}_n$ szorzat valós szám annak következtében, hogy a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomok együtthatói valós számok. Mivel a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ függvényt egy esetleges -1-gyel való szorzás segítségével úgy választottuk, hogy $\frac{\tilde{P}(0)}{\tilde{R}(0)} > 0$, ezért ez a tényező kiesik a számolás során. Ez azt jelenti, hogy a (23) formula érvényes, azaz a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ függvény teljesíti a (15) formulát. Hátra van még a (22) azonosság igazolása.

Ha $|z_0| > 1$, akkor a (22) formula baloldalán szereplő kifejezés analitikus függvény a $\{z\colon |z| < |z_0|\}$ körben, ezért az analitikus függvények Hergoltz–integrál előállításáról szóló tétel alapján (lásd például a Petruska György komplex függvénytan jegyzet (9.2.10) tételét), a (22) azonosság érvényes. Valóban a képlet mind a két oldalán analitikus függvény szerepel, és a harmonikus függvények előállításáról szóló formula alapján látható, hogy e kifejezések reális részei egyenlőek. Ezért elég azt ellenőrizni, hogy mind a két kifejezés nullával egyenlő az origóban. A jobboldali kifejezés értéke az origóban $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{e^{i\vartheta}-z_0}{-z_0}\right|d\vartheta = \oint_{|r|=1}\log\left|\frac{r-z_0}{-z_0}\right|dr = 0$, mert a $\log\left|\frac{z-z_0}{-z_0}\right| = \operatorname{Re}\log\left(\frac{z-z_0}{-z_0}\right)$ függvény harmonikus a $\{z\colon |z| < |z_0|\}$ tartományban, és ezért e függvény körintegrálja az egységkörön egyenlő e függvény értékével az origóban. A baloldal értéke szintén 0 az origóban.

Ha $|z_0| = 1$, akkor válasszunk olyan z_n, $|z_n| > 1$, $n = 1, 2, \dots$, sorozatot, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Ekkor felírva a (19) azonosságot, mindenütt z_n-et írva z_0 helyett, $n \to \infty$ határátmenettel megkapjuk a (22) azonosságot ezzel a z_0 számmal is. (Vegyük észre, hogy a jobboldalon tekintett integrál $\frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}$ magfüggvényének az abszolut értéke egyenletesen korlátos, ha $R < 1$. Ez segít a határátmenet jogosságának az indoklásában.)

Eredményeinkből az is következik, hogy amennyiben egy stacionárius sorozat $g(\lambda)$ spektrál sűrűségfüggvénye $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ alakban adható meg egy racionális törtfüggvény segítségével, akkor a stacionárius sorozat reguláris. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy az $\int_{-\pi}^{\pi}\log g(\lambda)\,d\lambda > -\infty$ feltétel teljesül. Ez a feltétel teljesül, bár a $g(\lambda)$ spektrál sűrűségfüggvény vehet fel nagyon kis értékeket, ha a $P(z)$ függvénynek van gyöke az egységkör vonalon. Ez azonban nem rontja el a $\log g(\lambda)$ függvény integrálhatóságát. Viszont a $g(\lambda)$ spektrálsűrűség előállítását megadó racionális törtfüggvény $R(z)$ nevezőjének nem lehet gyöke az egységkör vonalon, mert a $g(\lambda)$ függvény integrálható kell hogy legyen. Be lehet látni továbbá a következő állítást is.

Feladat: E feladat megfogalmazásában az előbb bevezetett jelöléseket fogom használni. Mutassuk meg, hogy ha egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius Gauss sorozat spek-

trálsűrűség függvénye $g(t) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{P(e^{it})}{R(e^{it})}\right|^2$ alakú, akkor létezik független standard normális valószínűségi változók olyan $\dots,\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots$ sorozata, amely teljesíti a (19) formulát.
Segítség: Tekintsük az Y_n sorozat $Y_n = \int e^{int}\frac{P(e^{it})}{R(e^{it})}Z(\,dt)$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, véletlen spektrál mérték szerinti integrál előállítását, ahol $Z(\,dt)$ a $\frac{1}{2\pi}\lambda$ a $[-\pi,\pi]$ intervallumon vett normalizált Lebesgue mérték szerinti alkalmas véletlen spektrál mérték. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon_n = \int e^{int}Z(\,dt)$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, alkalmas választás.

Előfordulhat, hogy egy moving average folyamat $g(\vartheta)$ spektrálsűrűségének van gyöke a $-\pi \le \pi$ intervallumban, vagy ami ezzel ekvivalens, a $g(\vartheta)$ spektrálsűrűség függvény $g(\vartheta) = |P(e^{i\vartheta})|^2$ előállításában szereplő $P(z)$ polinom egyik gyöke az egységkör határán van. Ez a legnehezebb eset. Az alábbi példában ilyen modellre adunk egy látszólag egyszerű példát.

Példa. Legyen ε_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, független standard normális valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $X_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, moving average sorozatot. Adjuk meg az X_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, sorozat Wold felbontását.

A példa tárgyalása. A vizsgálandó stacionárius sorozat spektrálsűrűsége

$$g(\vartheta) = |1+e^{i\vartheta}|^2 = |P(e^{i\vartheta})|^2$$

a $P(z) = 1+z$ polinommal. Mivel e polinom egyetlen gyöke a $z=-1$ pont ezért a Wold felbontást a $H_0(z) = 1+z$ függvény adja meg. Ez azt jelenti, hogy a Wold felbontás $X_n = V_n + V_{n-1}$ alakban adható meg alkalmas V_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, független standard normális valószínűségi változók segítségével. A fő probléma ezeknek a valószínűségi változóknak a megadása.

Az X_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, stacionárius sorozat előállítható $X_n = \int e^{in\vartheta}Z(\,d\vartheta)$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, alakban, ahol $Z(\cdot)$ véletlen spektrálmérték $g(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}|1+e^{i\vartheta}|^2$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, spektrálsűrűség függvénnyel. Továbbá az általános elmélet szerint

$$V_n = \int e^{in\vartheta}\frac{1}{\overline{H_0(e^{-i\vartheta})}}\,dZ(\vartheta) = \int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}}\,dZ(\vartheta)$$

alakban adható meg. Ez a formula azonban nem jól számolható. Ha felírjuk az $\frac{1}{H_0(z)}$ Taylor sorát azt kapjuk, hogy $\frac{1}{H_0(z)} = \frac{1}{1+z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$. Ez formálisan azt sugallná, hogy

$$\begin{aligned} V_n &= \int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}}\,dZ(\vartheta) = \int e^{in\vartheta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-ik\vartheta}\,dZ(\vartheta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int e^{i(n-k)\vartheta}\,dZ(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k X_{n-k}. \end{aligned}$$

Ez azonban egy divergens sor, így ez az előállítás értelmetlen.

Viszont a szövegben tárgyalt heurisztikus gondolatmenet a következő megoldást sugallja.

$$V_n = \lim_{R\to 1}\int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\,dZ(\vartheta) = \lim_{R\to 1}\int e^{in\vartheta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R^k e^{-ik\vartheta}\,dZ(\vartheta)$$
$$= \lim_{R\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R^k\int e^{i(n-k)\vartheta}\,dZ(\vartheta) = \lim_{R\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R^k X_{n-k},$$

ahol a konvergens R számsorozat elemei 1-nél kisebb számok. Azaz azt sejtjük, hogy a $V_{n,R} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k R^k X_{n-k}$ számok konvergálnak a V_n valószínűségi változóhoz, ha $R\to 1$. Vegyük észre azt is, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k R^k X_{n-k} = \int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\,dZ(\,d\vartheta)$, azonosság is érvényes minden $0<R<1$ számra abban az értelemben, hogy a baloldalon vett végtelen összeg az X_n, $n=0,\pm1,\dots$, stacionárius sorozat G spektrálmértéke szerinti L_2 konvergenciában tart a jobboldalhoz, azaz

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{k=0}^{N}(-1)^k R^k X_{n-k} - \int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\,dZ(\,d\vartheta)\right]^2$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int\left|e^{in\vartheta}\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k R^k e^{-ik\vartheta} - \frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right)\right|^2 dG(\,d\vartheta) = 0,$$

mivel az integrandus az utolsó kifejezés jobboldalán egyenletesen konvergál nullához minden $0<R<1$ számra, ha $N\to\infty$.

Belátjuk, hogy a $\lim\limits_{R\to 1} V_{n,R} = V_n$ állítás igaz a következő értelemben: $\lim\limits_{R\to 1} E(V_{n,R} - V_n)^2 = 0$. Valóban,

$$E(V_n - V_{n,R})^2 = E\left(\int e^{in\vartheta}\left(\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}} - \frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right)dZ(\vartheta)\right)^2$$
$$= \int\left|\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}} - \frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right|^2 G(\,d\vartheta),$$

ahol $G(\,d\vartheta) = \frac{1}{2\pi}|1+e^{-i\vartheta}|^2\,d\vartheta$, az X_n stacionárius sorozat spektrálsűrűség függvénye. Innen

$$E(V_n - V_{n,R})^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}} - \frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right|^2 |1+e^{-i\vartheta}|^2\,d\vartheta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-R)^2}{|1+Re^{-i\vartheta}|^2}\,d\vartheta.$$

Ez a kifejezés nullához tart, bár $\lim\limits_{R\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1+Re^{-i\vartheta}|^2}\,d\vartheta=\infty$ a $\pm\pi$ pont kis környezetének hozadéka miatt ezen integrálhoz. Viszont némi számolással belátható, hogy ennek az integrálnak a nagyságrendje $O((1-R)^{-1})$, mivel az integrandus értéke a 'rossz' $\pm\pi$ pontok környezetében $O\left(\frac{1}{(1-R)^2+(\vartheta\mp\pi)^2}\right)$. Ezért az $(1-R)^2$ faktor miatt a kifejezés nullához tart $R\to 1$ esetén.

1. megjegyzés. Az előző példában kiszámolt V_n valószínűségi változók valójában az X_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$ változók definiciójában szereplő ε_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$ független, standard normális valószínűségi változók. Ez a vizsgált sorozatok véletlen spektrál mérték szerinti integrál előállításából, és a véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesitési szabályából azonnal látszik, (elemi bizonyítása is egyszerű) ugyanis, ha az ε_n véletlen sorozatot $\varepsilon_n=\int e^{in\vartheta}dZ_0(\vartheta)$ véletlen spektrál mérték szerinti integrálként állítjuk elő, akkor $X_n=\int e^{in\vartheta}(e^{in\vartheta}(1+e^{-i\vartheta})dZ_0(\vartheta)$, azaz $dZ(\vartheta)=(1+e^{-i\vartheta})dZ_0(\vartheta)$.

2. megjegyzés. Tekintsünk egy a (18) formulában megadott általános X_n, $n=0,\pm1,\dots,$ moving average folyamatot. Ha a $P(z)=\sum\limits_{p=0}^{k}a_pz^p$ polinomnak nincs gyöke a $\{z\colon |z|<1\}$ egységkör belsejében, akkor a (18) formulában megadott képlet az X_n, $n=0,\pm1,\dots,$ folyamat Wold felbontása, mert $P(z)=H_0(z)$, és ε_n, $n=0,\pm1,\dots$ független standard normális valószínűségi változók sorozata. A fő feladat az, hogy mindegyik ε_n valószínűségi változót fejezzük ki az X_k, $k\le n$, valószínűségi változók lineáris kombinációjaként. Láttuk, hogy ennek érdekében egy akalmas véletlen spektrál mérték szerinti integrált kell kiszámolni, amelynek magfüggvénye az $e^{in\vartheta}\frac{1}{H_0(e^{i\vartheta})}=\frac{e^{in\vartheta}}{P(e^{-i\vartheta})}$ függvény. Ennek az integrálnak a kiszámítása érdekében érdemes kiszámolni az $\frac{1}{P(z)}$ függvénynek a nulla pont körüli hatványsorát. Ezt könnyebben tudjuk kiszámolni, ha az $\frac{1}{P(z)}$ függvényt előállítjuk elemi $\frac{1}{(z-z_j)^l}$ alakú kifejezések lineáris kombinációként, ahol z_j a $P(z)$ polinom (esetleg többszörös) gyöke.

A fent vázolt módszer alkalmazásában akkor jelenik meg nehézség, ha a $P(z)$ polinomnak van 1 abszolut értékű gyöke. Ilyen esetet tárgyaltunk az előző feladatban, amelyben a $P(z)=1+z$ függvény jelent meg. Bizonyos modellekben olyan $P(z)$ polinom jelenhet meg, amelynek többszörös multiplicitású 1 abszolut értékű sajátértéke is létezik. Ilyen modell például az $X_n=\varepsilon_n+2\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_{n-2}$, $n=0,\pm1,\dots$ mozgó átlag. Ehhez a modellhez a $P(z)=(1+z)^2$ polinom tartozik. Az ilyen modellek is tárgyalhatóak hasonlóan az $X_n=\varepsilon_n+\varepsilon_{n-1}$ mozgó átlaghoz, bár az egyes lépések jogosságának az igazolása kissé több munkát igényel.