Lineáris algebra feladatok:

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix felírható a következő "polár koordinátás alakban": $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1\mathbf{U}_1$ vagy $\mathbf{A} = \mathbf{U}_2\mathbf{B}_2$, ahol $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ szimmetrikus pozitív (szemi)definit mátrixok, $\mathbf{U}_1$ és $\mathbf{U}_2$ unitér mátrixok. A $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ mátrixok egyértelműen meghatározottak.

2. Legyen $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix. Ekkor $\sup\limits_{\mathbf{U} \text{ unitér mátrix}} \operatorname{Tr} \mathbf{AU} = \operatorname{Tr} \mathbf{AU}_0^*$, ahol $\mathbf{A} = \mathbf{BU}_0$ az $\mathbf{A}$ mátrix polár felbontása.

3. Legyen $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ és $\mathbf{B} = (b_{i,j})$, $1 \le i,j \le n$, két $n \times n$-es mátrix. Definiáljuk közöttük a következő műveletet: $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a_{i,j}b_{i,j})$, $1 \le i,j \le n$. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrixok, akkor $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ is az.

4. Legyenek $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ $n \times n$-es szimmetrikus pozitív definit mátrixok, és legyenek az $\mathbf{A}_j$, $j = 1\dots,k$, mátrix sajátértékei monoton sorrendben $0 \le \lambda_1^{(j)} \le \lambda_2^{(j)} \le \dots \le \lambda_n^{(j)}$. Legyenek $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$, $n \times n$-es mátrixok, melyeknek a normája kisebb vagy egyenlő 1. Bizonyítsuk be, hogy
$$|\operatorname{Tr} \mathbf{B}_0\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{A}_k\mathbf{B}_k| \le \sum_{p=1}^{n} \lambda_1^{(p)}\lambda_2^{(p)} \cdots \lambda_k^{(p)}.$$
Ennek az egyenlőtlenségnek a segítségével bizonyítsuk be a következő "Hölder egyenlőtlenséget" mátrixokra:
$$|\operatorname{Tr} \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k| \le \prod_{m=1}^{k} \left(\operatorname{Tr} |\mathbf{A}_m|^{p_m}\right)^{1/p_m},$$
ahol $\mathbf{A}_m = |\mathbf{A}_m|\mathbf{U}_m$ polár felbontás definiálja az $|\mathbf{A}_m|$ mátrixot, (mindegy, hogy a bal vagy jobboldali polár felbontást tekintjük), és p_m, $m = 1,\dots,k$, egész számok, melyek teljesítik a $\sum\limits_{m=1}^{k} \dfrac{1}{p_m} = 1$ relációt.

5. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két szimmetrikus $n \times n$-es mátrix, melyekre $\mathbf{A} \ge \mathbf{B}$, azaz $(\mathbf{A}x, x) \ge (\mathbf{B}x, x)$ minden $x \in \mathbf{R}^n$-re. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$, $\mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_n$ sajátértékei teljesítik a $\lambda_j \ge \mu_j$, $j = 1,2,\dots,n$ relációt.

6. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ sajátvektorokkal és $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékekkel. Legyen $\mathbf{B}$ egy másik $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei különbözőek. Bizonyítsuk be, hogy a perturbált mátrix $\mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}$ $\mathbf{s}_j(\varepsilon)$ sajátvektorai és $\lambda_j(\varepsilon)$ sajátértékei, $j = 1,\dots,n$ teljesítik a
$$\mathbf{s}_j(\varepsilon) = \mathbf{s}_j + \varepsilon\mathbf{t}_j + O(\varepsilon^2)$$
$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j + \varepsilon\mu_j + O(\varepsilon^2)$$
relációt. Számítsuk ki az $\mathbf{t}_j$ vektorokat és μ_j számokat a fenti képletben. Mit lehet mondani abban esetben, amikor az $\mathbf{A}$ mátrixnak többszörös sajátértéke van?

Hasznos észrevételek a feladatok megoldásához:

1. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1\mathbf{U}_1$ akkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{B}_1^2$. Határozzuk meg a $\mathbf{B}_i$ mátrixokat ezen észrevétel segítségével.

2. Lássuk be, hogy ha $\mathbf{B}$ pozitív definit szimmetrikus, és $\mathbf{U}$ unitér mátrix, akkor $\operatorname{Tr}\mathbf{BU} \le \operatorname{Tr}\mathbf{B}$. (Későbbi alkalmazások céljából lássuk be, hogy az állítás akkor is igaz, ha $\|\mathbf{U}\| \le 1$, de $\mathbf{U}$ nem feltétlenül unitér mátrix.)

3. Lássuk be, hogy $\mathbf{A} = \sum \lambda_j \mathbf{s}_j \circ \mathbf{s}_j^*$ alakba írható, ahol $\mathbf{s}_j$ és λ_j az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai és sajátértékei. Bizonyítsuk be az állítást az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok ilyen reprezentációja segítségével.

4. Lássuk be az állítást abban a speciális esetben, amikor $\mathbf{A}_j = \mathbf{P}^{(j)}$ egy projekció. (Ebben az esetben azt kell belátni, hogy az egyenlőtlenség baloldala kisebb, mint $\min\limits_j \operatorname{rank}\mathbf{P}^{(j)}$.) Lássuk be az általános esetet az $\mathbf{A}_j$ mátrixot a következő alakban felírva: $\mathbf{A}_j = \sum\limits_{m=0}^{n-1}(\lambda_{m+1}^{(j)} - \lambda_m^{(j)})\mathbf{P}_m^{(j)}$, ahol $\mathbf{P}_m^{(j)}$ a projekció az $\mathbf{A}_j$ mátrixnak a $\lambda_m^{(j)}$ sajátértékeknél kisebb sajátértékű sajátvektorok által kifeszített altérre.

5. Az, hogy $\lambda_n \ge \mu_n$ azonnal következik a $\lambda_n = \sup(\mathbf{A}x, x)$ és $\mu_n = \sup(\mathbf{B}x, x)$ relációkból. Az általános eset bizonyításához lássuk be a felhasznált eredmény következő mini-max általánosítását: $\lambda_k = \max\limits_{x\in\bar{R}^k}\min\limits_{\bar{R}_k\in\mathcal{R}^k}(\mathbf{A}x, x)$, ahol $\mathcal{R}^k$ jelöli R^n összes k-dimenziós alterének a halmazát.

6. Koordináta transzformációval elérhetjük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix megegyezik a $\Lambda = (\lambda_{j,k})$, $\lambda_{j,k} = \delta_{j,k}\lambda_j$ diagonális mátrixszal, és $\mathbf{s}_k = \mathbf{e}_k$ a k-ik egységvektorral. Tekintsük a transzformált feladatot. Legyen $\mathbf{B} = (b_{j,k})$, a keresett $\mathbf{t}_k$ vektor $(t_{j,k},\ 1 \le j \le n)$. Ekkor az $(\mathbf{s}_k + \varepsilon\mathbf{t}_k)(\Lambda + \varepsilon\mathbf{B}) = (\lambda_k + \varepsilon\mu_k)(\mathbf{s}_k + \varepsilon\mathbf{t}_k)$ egyenletben az ε együttható vizsgálata a következő egyenletet adja:

   $$\mathbf{t}_k(\lambda_k\mathbf{I} - \Lambda) = \mathbf{e}_k(\mathbf{B} - \mu_k\mathbf{I}).$$

   Innen $t_{j,k} = \dfrac{b_{k,j}}{\lambda_k - \lambda_j}$, ha $j \ne k$, $\mu_k = b_{k,k}$. Válasszuk a $t_{k,k}$ koordinátát $t_{k,k} = 0$-nak, ami a sajátvektor valamilyen normálását jelenti. (Miért van szabadságunk ennek a koordinátának a megválasztásában?) Be kell látni, hogy az így kapott becslés helyes, és nem csupán formális közelítés.

   Abban az esetben, ha sajátértékek nem mind különbözőek, tekintsük azt a speciális esetet, amikor $\lambda_1 = \lambda_2$, és $\lambda_j \ne \lambda_i$, ha $j \ne i$ és $j \ge 2$. Ekkor az $\mathbf{A} = \Lambda$ mátrix $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ sajátvektorai helyettesíthetőek bármely $\mathbf{s}_1' = \alpha\mathbf{s}_1 + \beta\mathbf{s}_2$ és $\mathbf{s}_2' = \beta\mathbf{s}_1 - \alpha\mathbf{s}_2$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ortogonális vektorokkal. Az α és β számok megválaszthtók úgy, hogy a $\mathbf{B}$ mátrix megszorításának a $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ vektorok által kifeszített altérre $\mathbf{s}_1'$ és $\mathbf{s}_2'$ sajátvektorai. mátrix. Jelöljük e mátrix sajátértékeit m_1 és m_2-vel.

Ekkor a különböző sajátértékek esetén tárgyalt egyenlet adja meg a sajátvektorok és sajátértékek elsőrendű közelítését. A különbség a megoldásban az, hogy most $\mathbf{s}_i(\varepsilon) = \mathbf{s}_i$, $\mu_i(\varepsilon) = m_i$, $i = 1, 2$-re. Ez a formula leírja, hogy az $m_1 = m_2$ elfajuló esetet kivéve a $\mathbf{B}$ mátrix hatására hogyan hasad szét az $\mathbf{A}$ mátrix kétdimenziós invariáns altere a perturbáció hatására.