Líneáris algebra és funkcionál analízis

1.) Legyen A és B két $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\det(I - AB) = \det(I - BA).$$

Segítség: Mi a kapcsolat az AB és BA mátrixok Jordan féle normálalakja között?

A további példák segítségével a lineáris algebra és a Hilbert terek (szép) operátoraira vonatkozó spektráltétel kapcsolatát igyekszünk jobban megérteni. Tekintsük a következő példát: Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mérhető tér egy μ mértékkel. Tekintsük az ezen a téren négyzetesen integrálható függvények által meghatározott H Hilbert teret. Legyen továbbá adva egy f mérhető függvény ezen a mérhető téren, és legyen $\mathbf{B} = \mathbf{B}_f$ az általa meghatározott szorzás operátor, azaz legyen $\mathbf{B}g(x) = f(x)g(x)$, minden $x \in X$ pontra és $g \in H$ függvényre. Legyen adva egy $\bar{H}$ Hilbert tér és azon egy $\mathbf{A}$ operátor. Azt mondjuk, hogy ennek a $\mathbf{A}$ operátornak a $\bar{H}$ téren megadjuk a spektrál előállítását, ha definiálunk egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékteret, az e téren definiált négyzetesen integrálható függvények terén egy f függvény segítségével meghatározott $\mathbf{B} = \mathbf{B}_f$ szorzásoperátort továbbá a $\bar{H}$ Hilbert tér olyan izomorfiáját a H Hilbert térrel, mely az $\mathbf{A}$ operátort a $\mathbf{B}$ operátorba viszi, azaz $\mathbf{A}u = \mathbf{B}(\mathbf{T}u)$ minden $u \in \bar{H}$ vektorra. (Az állítás azon része, hogy minden $u \in \bar{H}$ pontot tekintünk nem korlátos operátorok esetében pontatlan, de ettől most ne zavartassuk magunkat.) Bár ez a definició csak az egyik lehetséges definiciója operátorok spektrál előállításának, jó érveket lehet felhozni amellett, hogy érdemes ezt a definiciót vizsgálni.

2a.) Mutassuk meg, hogy véges dimenziós térbeli transzformáció esetében a spektrál előállítás ekvivalens a transzformáció mátrixának diagonalizálásával. Pontosabban egy az n dimenziós térben értelmezett $\mathbf{A}$ operátor diagonalizálása ekvivalens az n-dimenziós térnek az $\mathbf{A}$ operátorral együtt a fenti értelmű izomorfiájával az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ térbe egy alkalmas szorzásoperátorral, ahol X egy n elemű halmaz, $\mathcal{A}$ az X összes részhalmazának σ-algebrája és μ a számláló mérték.

2.) Tekintsük az $(R^1, \mathcal{A}, \lambda)$ téren a négyzetesen integrálható függvények terét és ezen az $i\dfrac{d}{dx}$ differenciáloperátort, ahol R^1 a számegyenes, $\mathcal{A}$ a Borel σ-algebra és λ a Lebesgue mérték. (A differenciáloperátor úgy értendő, hogy azt természetes módon definiáljuk a differenciálható függvényekre, és tekintjük ennek a számunkra legkényelmesebb kiterjesztését. Kényelmi okokból a differenciáloperátort beszoroztuk az $i = \sqrt{-1}$ számmal.) Adjuk meg ennek az operátornak a spektrál előállítását. Konkrétabban: Adjuk meg az $L_2\left(R^1, \mathcal{A}, i\dfrac{d}{dx}\right)$ és az $L_2\left(R^1, \mathcal{A}, \mathbf{A}_x\right)$ rendszer izomorfiáját, ahol $\mathbf{A}_x$ az x függvénnyel való szorzás operátorát jelenti.

2b.) Ki lehet-e terjeszteni az $i\dfrac{d}{dx}$ operátort az egész Hilbert térre?

A következő feladat a funkcionálanalízisben (és a kvantummechanikában) fontos szerepet játszó Stone tétel hátterét kívánja elmagyarázni egy véges dimenziós terekben kimondott állítás segítségével. Az említett eredmény a következő:

Stone tétel. *Legyen* $\mathbf{Q}_t$*,* $t \geq 0$*, unitér operátorok folytonos félcsoportja egy szeparábilis Hilbert téren, azaz legyen* $\mathbf{Q}_{s+t} = \mathbf{Q}_s \mathbf{Q}_t$*,* $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$*,* $\lim_{t \to 0} \mathbf{Q}_t = \mathbf{I}$*. Ekkor létezik olyan* $\mathbf{A}$ *önadjungált operátor, melyre* $\mathbf{Q}_t = e^{it\mathbf{A}}$*, minden* $t \geq 0$*-ra.*

Az állítás jobb megértése érdekében lássuk be annak véges dimenziós analogonját.

3.) Legyen $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$ két felcserélhető unitér $n \times n$-es mátrix, azaz legyen $\mathbf{RS} = \mathbf{SR}$. Jelölje $\mathbf{P}_\lambda$ az ortogonális vetítést az $\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{Q}_\mu$ az ortogonális vetítést a $\mathbf{S} - \mu\mathbf{I}$ mátrix magterére. Lássuk be, hogy $\mathbf{P}_\lambda$ és $\mathbf{Q}_\mu$ is felcserélhető.

a.) Legyen $\mathbf{R}_t$, $t \in \mathbf{T}$, felcserélhető $n \times n$-es unitér mátrixok egy rendszere. Akkor ezeknek létezik szimultán diagonizálása, azaz olyan $\mathbf{U}$ unitér transzformáció, melyre $\mathbf{R}_t = \mathbf{U}\Lambda_t\mathbf{U}^*$ minden $t \in \mathbf{T}$-re, és Λ_t diagonális mátrix (egy abszolut értékű elemekkel a főátlóban).

b.) Ha $\mathbf{R}_t$, $t \geq 0$, unitér $n \times n$-es mátrixok folytonos félcsoportja, azaz $\mathbf{R}_s\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{s+t}$ és $\lim_{t \to 0} \mathbf{R}_t = \mathbf{I}$, akkor e mátrixok felírhatóak $\mathbf{R}_t = e^{it\mathbf{A}}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ $n \times n$-es önadjungált mátrix.

Segítség: Írjuk fel az n dimenziós teret $R^n = \operatorname{Ker}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) + \operatorname{Im}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})$ alakban, és vegyük észre, hogy $u \in \operatorname{Ker}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})$-ból ($u \in \operatorname{Im}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})$-ból) következik, hogy $\mathbf{S}u \in \operatorname{Ker}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})$ ($\mathbf{S}u \in \operatorname{Im}(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})$).