Mértékelméleti feladatok:

0.) Lássuk be a következő állítást: Ha $(X, \mathcal{A})$ szeparábilis metrikus tér, μ véges mérték az $(X, \mathcal{A})$ tér Borel mérhető halmazain. Ekkor tetszőleges A Borel mérhető halmazra, és $\varepsilon > 0$ számra létezik olyen G nyílt halmaz, melyre $A \subset G$, és $\mu(G) < \mu(A) + \varepsilon$.

Természetesen felmerül a következő kérdés. Igaz-e a fenti állítás megfelelője olyan topológikus terekben, melyek nem metrizálhatóak? Ez a kérdés nehezebb. Egy ellenpéldát fogunk megtárgyalni a további feladatokban. Ezt a példát Laczkovich Miklóstól tanultam.

A tárgyalandó példa: Legyen Ω az összes megszámlálható rendszámból és a legkisebb nem megszámlálható rendszámból az ω_1 rendszámból álló halmaz. Ha α és β két megszámlálható rendszám, $\alpha < \beta$, akkor a $\{\gamma\colon \alpha < \gamma < \beta\}$, $\{\gamma\colon \gamma > \alpha\}$ alakú halmazok nyíltak. Az összes nyílt halmaz az ezen halmazok unióiból álló halmazok. (Lássuk be, hogy ez a definició jogos, e definició teljesíti a nyílt halmazrendszerektől elvárt tulajdonságokat.) Tekintsük a nyílt halmazok által generált Borel σ-algebrát. Ezen fogunk definiálni egy 0–1 mértéket, azaz olyan σ-additív halmazfüggvényt a Borel mérhető halmazokon, melyre $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(A) = 1$ minden Borel mérhető halmazra.

Egy F zárt halmazt kofinális zárt halmaznak nevezünk, ha minden megszámlálható α rendszámra létezik $\beta \in F$ megszámlálható rendszám, melyre $\alpha < \beta$. Ha F zárt halmaz, akkor legyen $\mu(F) = 1$, ha F kofinális zárt halmaz, $\mu(F) = 0$, ha F nem kofinális zárt halmaz. Belátjuk, hogy ez a halmaz kiterjeszthető egy 0–1 mértékké az Ω tér Borel σ-algebráján. Ez a példa nem teljesíti az 1. feladat állítását.

A fent megfogalmazott állítást belátjuk a következő 1–3 feladatban. Ezenkívül a 4. feladatban belátjuk, hogy a fent definiált topológikus tér kompakt:

1.) Legyen F az előbb definiált topológikus tér zárt részhalmaza. Lássuk be, hogy ha $\alpha_t \in F$ bizonyos α_t rendszámokra, $t \in T$ tetszőleges indexhalmaz, akkor $\sup\limits_{t \in T} \alpha_t \in F$.
Lássuk be, hogy megszámlálható sok kofinális zárt halmaz metszete szintén kofinális zárt halmaz.

2.) Adva egy $A \subset \Omega$ halmaz, jelölje A^c e halmaz komplementerét. Lássuk be, hogy minden Borel mérhető A halmazra az (A, A^c) halmazpár egyik eleme tartalmaz egy kofinális zárt halmazt, a másik pedig nem. Legyen $\mu(A) = 1$, ha A tartalmaz egy kofinális zárt halmazt, $\mu(A) = 0$, ha az A halmaz nem tartalmaz kofinális zárt halmazt.

3.) Lássuk be, hogy $\mu(\{\omega_1\}) = 0$, és $\mu(G) = 1$ minden olyan G nyílt halmazra, melyre $\omega_1 \in G$.

4.) Lássuk be, hogy az előbb definiált topológikus tér kompakt.

A következő feladatban egy érdekes, nem triviális mértékelméleti tétel bizonyítását tárgyaljuk meg. Ez a következő eredmény:

Vitali–Hahn–Saks tétel. *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A})$ mértéktéren μ_n valószínűségi mér-*

tékek egy sorozata. Ha a $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A)$ limesz létezik minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra akkor a $\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$ halmazfüggvény is valószínűségi mérték.

Egy lehetséges bizonyítás vázlata:

5.) Lássuk be, hogy elég az állítást elég abban a speciális esetben bebizonyítani, amikor $\Omega = \{1, 2, \dots\}$, $\mathcal{A} =$ a természetes számok összes részhalmaza. Továbbá kényelmesebb tárgyalás érdekében feltehetjük, hogy van egy μ_0 domináló valószínűségi mérték, $\mu_0(\{k\}) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, és a tekintett μ_n, $n = 1, 2, \dots$, mértéksorozat elemeinek létezik f_n, $n = 1, 2, \dots$, sűrűségfüggvényük a μ_0 mérték szerint.

Az állítás jobb megértése érdekében tekintsük a következő példát: Legyen μ_n az a mérték, melyre $\mu_n(\{j\}) = \dfrac{1}{n}$, $1 \le j \le n$. Miért nem alkalmazható a Vitali–Hahn–Saks tétel ebben az esetben?

A fenti példa mutatja, hogy a Vitali–Hahn–Saks tételben nagyon fontos, hogy a limesz létezését *minden* mérhető halmaz esetében feltettük. Az ilyen feladatok megoldásában hasznos a Baire féle kategória tétel, mely a következőt állítja: Legyen (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér, $F_k \subset X$, $k = 1, 2, \dots$, zárt halmazok, melyek uniója a teljes X tér, azaz $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = X$. Ekkor létezik olyan F_k, melynek van belső pontja.

6.) Álljon az X a természetes számok részhalmazaiból, és legyen $\rho(A, B) = \mu_0(A \Delta B) = \mu_0\left((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)\right)$, $\mu_0(\{k\}) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Ekkor (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus tér. Minden $\varepsilon > 0$ és N pozitív egész számra a $C(\varepsilon, N) = \{A\colon \sup\limits_{n,m\ge N} |\mu_n(A) - \mu_m(A)| \le \varepsilon\}$ halmaz az (X, ρ) tér zárt részhalmaza.

7.) Tudjuk, hogy ha teljesülnek a Vitali–Hahn–Saks tétel feltételeinek teljesülése esetén $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n(A) - \mu(A)| = 0$ a természetes számok minden A részhalmazára. Lássuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{A \text{ véges halmaz}} |\mu_n(A) - \mu(A)| = 0$.

8.) Tudjuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_n(\{k, k+1, \dots\} = 0$ minden rögzített n számra. Lássuk be, hogy a Vitali–Hahn–Saks tétel feltételeinek teljesülése estén a

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{1\le n<\infty} \mu_n(\{k, k+1, \dots\}) = 0$$

reláció is igaz.

9.) Bizonyítsuk be az Vitali–Hahn-Saks tételt.

10.) Mutassunk példát olyan μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékekre és μ_0 határmértékre a $[0, 1]$ intervallumon, melyekre $\lim\limits_n \mu_n(A) = \mu_0(A)$ minden Borel mérhető A halmazra, de a $\lim\limits_n \sup\limits_A |\mu_n(A) - \mu_0(A)| = 0$ reláció nem teljesül.

Segítség: Lássuk be, hogy az $f_n(x) = 1 + \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$, $f_0(x) = 1$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező mértékek példát mutatnak erre.