Feladat: A háromtest probléma speciális megoldásai

Arra vagyunk kiváncsiak, hogy a bolygó mozgásnak milyen egyszerű egyensúlyi megoldásai vannak három bolygó esetén. Az így felmerülő három-test probléma általában nem megoldható, de van érdekes egyszerű speciális megoldása.

Tekintsünk három pontszerű tömeget m_1, m_2 és m_3 tömeggel, valamilyen kezdő sebességgel, amelyek között a gravitációs kölcsönhatás működik.

Lássuk be, hogy nem lehet a három pontot úgy elhelyezni, hogy egy inerciarendszerben helyben maradjanak. Ez az állítás nem igazán érdekes, de érdekes lehet, hogy a három-test problémának létezik a következő speciális megoldása:

A három pont egyenlőoldalú háromszöget alkot, amelyik egyenletes sebességgel forog a három pont által kifeszített síkban e három (nem feltétlenül egyforma tömegű) pont fizikai súlypontja körül. Határozzuk meg a forgás sebességét.

Ez az állítás azt jelenti, hogy a három pont egy helyben áll egy forgó koordinátarendszerben, és egy egyenlőoldalú háromszöget feszít ki. Bizonyítsuk be, hogy ha a három pont egy helyben áll egy forgó koordinátarendszerben, és nincs egy egyenesen, akkor a három pont szabályos háromszöget alkot, melynek fizikai súlypontja a forgás tengelye.

Lássuk be, hogy lehetséges olyan megoldása is a három-test problémának, melyben a három pont egy egyenesen van, mely a fizikai súlypont körül egyenletes sebességgel forog. De ilyenkor a három pont által meghatározott szakaszok hosszának az aránya függ a pontok tömegétől.

Történeti megjegyzés:

A három-test problémának itt ismertetett egyensúlyi megoldását Lagrange találta meg először. Az egy egyenesen levő megoldás Eulertől származik. Lagrange úgy hitte, hogy az általa talált megoldás az égbolton nem figyelhető meg. Jóval később vették észre a csillagászok, hogy a Nap, a Jupiter és az un. trójai bolygócsoport közelítőleg egyenlőoldalú háromszöget alkot, tehát a Lagrange által talált megoldás megvalósul az égbolton.

Mivel ez egy közelítő megoldás, amelyik már rég kialakult, és azóta sem robbant fel, azt várjuk, hogy a Lagrange féle megoldás stabil, azaz ha a kezdeti időpontban beállítjuk ennek egy kis perturbációját, mint kezdeti feltételt, akkor a trajektória örökké ennek az egyensúlyi állapotnak a közelében marad. Ez az állítás be van bizonyítva, de a bizonyítás nehéz. Az Euler féle megoldás viszont instabil.

Egy külön lapon vázolom, hogyan lehet ezt a feladatot megoldani egyszerűen bizonyos fizikai törvényszerűségeket felhasználva.

A kívánt megoldásnak olyannak kell lenni, hogy a három bolygó áll egy a (fizikai) súlypont középpontú ω szögsebességgel forgó kordinátarendszerben. Ez úgy lehetséges, ha mindegyik bolygóra a ráható erők összege (figyelembe véve az $m_i r_i \omega^2$ súlypontba mutató centrifugális erőt is) nulla. Lássuk be, hogy a három bolygóra ható erők összege nulla. (Az állítás nem triviális része az, hogy a centrifugális erők összege nulla, ha a forgás középpontja a három pontból álló rendszer (fizikai) súlypontja.) Ha a három pont szabályos háromszöget alkot, akkor az egyes bolygókra ható erők a (fizikai) súlyvonal irányában hatnak. Ha az egyik bolygóra ható erők összege nulla, akkor mind a három bolygóra igaz ez. Határozzuk meg az egyenlő oldalú háromszög alakú megoldást.

Mutassuk meg, hogy tömegvonzási erők csak úgy lehetnek párhuzamosak a centrifugális erőkkel, ha a három bolygó vagy egyenlő oldalú háromszöget alkot vagy egy egyenesen van. Oldjuk meg a feladatot.

Meg kell még találnunk a három egy forgó egyenesen levő pontokból álló megoldást. Ennek érdekében vezessük be a következő jelöléseket. Legyen x_1, x_2 és x_3, $x_1 < x_2 < x_3$, a három pont koordinátája a (fizikai) súlypont körül forgó koordinátarendszerben, $x_3 - x_1 = a$, $x_2 - x_1 = \rho a$, $x_3 - x_2 = \sigma a$, ω a forgás szögsebessége és $M = m_1 + m_2 + m_3$. Ekkor $0 < \rho, \sigma < 1$, $\rho + \sigma = 1$, és érvényesek a következő egyenletek:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} -m_1 x_1 \omega^2 &= \frac{m_1 m_2}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{m_1 m_3}{(x_1 - x_3)^2} \\ m_3 x_3 \omega^2 &= \frac{m_2 m_3}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{m_1 m_3}{(x_1 - x_3)^2} \end{aligned}$$

Az utolsó két egyenletet át lehet írni így:

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{\rho^2 a^2} + \frac{m_3}{a^2} &= -x_1 \omega^2 = \frac{a\omega^2}{M}(m_2 \rho + m_3) \\ \frac{m_2}{\sigma^2 a^2} + \frac{m_1}{a^2} &= x_3 \omega^2 = \frac{a\omega^2}{M}(m_1 + m_2 \sigma) \end{aligned}$$

és innen

$$\frac{\frac{m_2}{\sigma^2} + m_1}{m_2 \sigma + m_1} = \frac{\frac{m_2}{\rho^2} + m_3}{m_2 \rho + m_3}, \qquad \rho = 1 - \sigma.$$

Lássuk be az utolsó egyenlet két oldalának monotonítása alapján, hogy az egyértelműen megoldható ρ-ban, $0 < \rho < 1$, és ezért az eredeti feladat is egyértelműen megoldható.

A kéttest probléma megoldása:

A következő feladatok célja annak megmutatása, hogy a középiskolában tanult fizika lefordítása a matematika nyelvére segít a bolygómozgást leíró differenciálegyenletek leírásában. Aztán érdemes megfogalmazni azokat az általános kérdéseket, melyek vizsgálata segít mechanikai feladatok megoldásában. A feladatokban csak a nap és a bolygók kölcsönhatását vesszük figyelembe, azaz a kéttest problémával foglalkozunk. Tehát adva van két pont, $\mathbf{x}^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), x_3^1(t))$ és $\mathbf{x}^2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), x_3^2(t))$ a térben, és ezek között a kölcsönhatás $-\frac{\text{const.}}{r^2}$, $r = |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2|$ nagyságú és a másik pont irányába hat. Ebben az esetben a Newton egyenletek a következők:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2\mathbf{x}^1(t)}{dt^2} &= \left(\frac{C(x_1^1(t) - x_1^2(t))}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^3}, \frac{C(x_2^1(t) - x_2^2(t))}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^3}, \frac{C(x_3^1(t) - x_3^2(t))}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^3} \right) \\
m_2 \frac{d^2\mathbf{x}^2(t)}{dt^2} &= \left(\frac{C(x_1^2(t) - x_1^1(t))}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^3}, \frac{C(x_2^2(t) - x_1^1(t))}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^3} \frac{C(x_3^2(t) - x_3^1(t))}{|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^3} \right),
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbf{x}^1(t) = \left(x_1^1(t), x_2^1(t), x_3^1(t)\right)$ és $\mathbf{x}^2(t) = \left(x_1^2(t), x_2^2(t), x_3^2(t)\right)$. Lássuk először azt be, hogy ez a kéttest probléma két egytest problémává esik szét, ha a a koordinátarendszer középpontját a súlypontba helyezzük. Pontosabban

1.) Legyen

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}^1 &= \mathbf{x}^1 - \frac{m_1\mathbf{x}^1 + m_2\mathbf{x}^2}{m_1 + m_2} \\
\bar{\mathbf{x}}^2 &= \mathbf{x}^2 - \frac{m_1\mathbf{x}^1 + m_2\mathbf{x}^2}{m_1 + m_2}.
\end{aligned}
$$

Ekkor

$$
\frac{d^2\bar{\mathbf{x}}^1(t)}{dt^2} = \left(\frac{\bar{C}\bar{x}_1^1(t)}{|\bar{\mathbf{x}}^1(t)|^3}, \frac{\bar{C}\bar{x}_2^1(t)}{|\bar{\mathbf{x}}^1(t)|^3}, \frac{\bar{C}\bar{x}_3^1(t)}{|\bar{\mathbf{x}}^1(t)|^3} \right)
$$

alkalmas $\bar{C}$ számmal, ahol $\bar{\mathbf{x}}^1 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Továbbá,

$$
\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\mathbf{x}^1(t) + m_2\mathbf{x}^2(t)\right) = 0.
$$

2.) Lássuk be az impulzusmomentum megmaradás törvényét az 1. feladatban megadott differenciálegyenlet megoldására, azaz azt, hogy $\frac{d}{dt}\left(\bar{\mathbf{x}}(t) \times \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}(t)\right) = 0$. Mutassuk meg, hogy az impulzusmomentum megmaradás törvényének a következő geometriai interpretációt lehet adni. Legyen

$$
S_{i,j}(s,t) = \Big\{ \text{Az } (x_i^1(s), (x_i^2(s)) \text{ és } (x_i^1(t), (x_i^2(t)) \text{ vektorok által kifeszített háromszög területe} \Big\}, \quad 1 \le i, j \le 3, \quad 0 \le s, t < \infty.
$$

Ekkor létezik a $\lim_{s\to t} \frac{S_{i,j}(s,t)}{t-s}$ limesz, és ez minden $0 \le t < \infty$ paraméterre ugyanaz a szám. Tekintsük azt a koordinátarendszert, melynek középpontja a súlypont, és az x^1 és x^2 koordináták a (transzformált) feladat kezdeti feltételeiben megadott hely és sebességkoordinátékkal párhuzamosak. Lássuk be, hogy ebben a koordinátarendszerben az impulzusmomentum megmaradás törvénye a következő állítással ekvivalens. Az $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ pont pályája az (x^1, x^2) koordináták által kifeszített síkban van, és teljesíti Kepler második törvényét.

A következő feladat tulajdonképpen az eddigi eredmények összefoglalása, illetve egy általánosabb a fizika megmaradási törvényei segítségével szintén megoldható feladat megfogalmazása.

3.) Mutassuk meg, hogy az $s = \frac{m_1\mathbf{x}^1(t) + m_2\mathbf{x}^2(t)}{m_1+m_2}$ súlypont egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, és a koordinátarendszert a súlypontba helyezve, a kéttest probléma megoldásához a következő feladatot kell vizsgálni: $x \in R^2$, és

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \operatorname{grad} U(|x|), \qquad U(r) = \frac{C}{r}\ .$$

A következőkben általános $U(x)$ (síkbeli, forgásszimmetrikus) potenciálfüggvényt fogunk tekinteni. Célunk az impulzusmomentum és az energiamegmaradás törvény felírása és a feladat megoldása e két megmaradási törvény segítségével.

Írjuk fel a az $x = x(t)$ pályáját polárkoordináta rendszerben. Legyen $e = e(t)$ az $x(t)$ vektorral párhuzamos (és egyirányú) $e_n = e_n(t)$ az e-re merőleges (pozitív irányban elforgatott) egységvektor. Jelölje $\varphi = \varphi(t)$ az $x(t)$ vektor és az abszcissza egyenes által közbezárt szöget. Ekkor $x(t) = r(t)e(t)$, $r(t) = |x(t)|$.

4.) Mutassuk meg, hogy $\frac{de(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}e_n(t)$, $\frac{de_n(t)}{dt} = -\frac{d\varphi(t)}{dt}e(t)$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2r(t)}{dt^2} - r(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2\right)e(t) + \left(2\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\varphi(t)}{dt} + r(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\right)e_n(t)$$

5.) Mutassuk meg, hogy $M = r(t)^2\frac{d\varphi(t)}{dt}$ nem függ t-től. (Impulzusmomentum megmaradás törvénye.)

6.) Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dr(t)}{dt}\left(\frac{d^2r(t)}{dt^2} - r(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 - \left.\frac{dU(r)}{dr}\right|_{r=r(t)}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{r(t)^2} - U(r(t))\right)\ . \end{aligned}$$

Ezért $K = \frac{1}{2}\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{r(t)^2} - U(r(t))$ nem függ t-től.

7.) Lássuk, hogy az utolsó összefüggés az energia megmaradás törvénye. Mutassuk meg, hogy

$$v^2(t) = \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 = \left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + r^2(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 + \frac{M^2}{r^2(t)}.$$

8.) Mutassuk meg a megmaradási törvények alapján, hogy

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M}{r^2\sqrt{2K + 2U(r) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{r^2(\varphi)}$$

Oldjuk meg a kéttest problémát.

Néhány természetesen felvetődő általános matematikai probléma, melyeket az előbb tárgyalt fizikai kérdések vetnek fel

1.) Hogyan tudjuk kihasználni a megmaradási törvényeket? Bár ebből a feladatsorból nem derült ki, de az alaposan kidolgozott elmélet megmutatja, hogy fontos kérdés az, hogy a különböző megmaradó mennyiségek Poisson zárójele nullával egyenlő-e. Ezt is jobban meg kell érteni.

2.) Milyen jelentősége van a mechanikai rendszer mozgását meghatározó Hamilton függvény szimmetriáinak?

3.) Hogyan lehet a mechanikai problémákat leíró differenciálegyenleteket átírni mozgó koordinátarendszerbe? Melyek a megengedett transzformációk és melyek ezek közül a leghasznosabbak?

4.) Mit lehet mondani a mechanika problémák stabilitásáról? Értsük meg, hogy periodikus pálya stabilitásának a vizsgálata lényegesen más (lényegesen nehezebb) probléma, mint egy álló pont stabilitásának a vizsgálata.

5.) Bár ebben a feladatsorban nem merült fel, szintén hasznos megérteni a Hamilton–Jacobi és Euler–Lagrange egyenletek (a mechanikai törvények megfogalmazása optimum elvek alapján) kapcsolatát.

6.) Hogyan lehet jellemezni azokat a differenciálegyenleteket, melyek a klasszikus mechanika mozgásait írják le? Pontosabban, a kérdés a következő: A Hamilton–Jacobi differenciálegyenletek a következő alakúak:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

ahol $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ a rendszer leíró pont helye a a fázistérben a t időpontban, $(x_1, \dots, x_n)$ ennek a pontnak a hely és $(p_1, \dots, p_n)$ ennek a pontnak az impulzus koordinátái, a $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ (vagy $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$) a rendszer Hamilton függvénye. Mely differenciálegyenletek jobboldala írható ilyen alakban alkalmas H Hamilton függvénnyel? Mely differenciálegyenletek írhatóak ilyen alakban megfelelő koordinátatranszformáció után?