A Bolyai Kollégium matematika szemináriuma
John H. Conway után szabadon

Legyen $L(H)$ a H halmazban nem szereplő legkisebb rendszám. ($L(H)$ tehát a legkisebb természetes szám, ami nincs H-ban, ha van ilyen.) Definiáljuk rekurzióval a rendszámokon (természetes számokon) a következő szokatlan összeadást és szorzást:

$$a + b = L(\{a' + b | a' < a\} \cup \{a + b' | b' < b\})$$

$$ab = L(\{(a'b + ab') + a'b' | a' < a, b' < b\}).$$

0. Lássuk be, hogy a fenti rekurziv definició értelmes.
1. Igazoljuk, hogy a rendszámok (természetes számok) ezzel a két művelettel kommutatív testet alkotnak. (Tanács: lássuk be, hogy a definiciókban az összes $a' < a$ mellett teszőleges $a' > a$ is bevehető. Reciprok létezése nehezebb, lásd 6. feladat.)
2. Írjuk le a műveleteket a természetes számokon. Mik ennek a testnek a résztestei?
3. Igazoljuk, hogy ω algebrai a természetes számok felett. Mi a minimálpolinomja? Mi az általa generált testbővítés?
4. Igazoljuk, hogy összes rendszám algebrailag zárt testet ad.
5. Mi a legkisebb algebrailag zárt résztest (azaz a prímtest algebrai lezártja)? Mi a "következő" test?
6. Igazoljuk, hogy minden rendszám a lehető legegyszerűbben bővíti a kisebb rendszámok által adott (parciálisan definiált) algebrai struktúrát. Mit is jelent ez? (Ennek pontos megfogalmazása és igazolása segít néhány előző feladatnál. Segítség: összeg egyszerűbb a szorzatnál, az a reciproknál, az az algebrai bővítésnél, ami egyszerűbb a transzcendens bővítésnél.)

Aki irtózik a végtelentől és a rendszámoktól még mindig megoldhatja a 1. és 2. feladatot (az előbbit természetes számokra). Azoknak, akik nem irtóznak a a rendszámoktól, de még nem találkoztak velük íme egy hevenyészett bevezetés:

A rendszámok a természetes számok sorozatának folytatása: beveszünk egy "végtelen nagy" számot, ω-t, majd egy annál is nagyobbat és így tovább egyesével, minden kezdőszelet után egy még nagyobbat hozzávéve. Végtelen sok lépés után sem állunk meg, csak akor, ha már "nem alkotnak halmazt" a bevett rendszámok. Ugyanez kissé precízebben:

Lineáris rendezés egy tranzitív $<$ reláció egy alaphalmazon, hogy $x = y$, $x < y$, $y < x$ közül pont egy teljesül. Ez jólrendezés, ha minden nem üres részhalmazból van legkisebb, azaz nincs leszálló végtelen lánc. Két jólrendezés ekvivalens, ha az alaphalmazok közt rendezéstartó bijekció van. A rendszámok ezen ekvivalencia osztályai (ha ez értelmes lenne), azaz a jólrendezések tipusai. Egy jólrendezés egy kezdőszelete az egy eleménél kisebb elemek halmaza ugyanazzal a rendezéssel. Egy rendszám kisebb egy másiknál, ha kezdőszelete. Ez jólrendezi a rendszámokat (eltekintve attól, hogy azok nem alkotnak halmazt). Így aztán működik rájuk az indukció: $(\forall\alpha((\forall\beta < \alpha\ T(\beta)) \rightarrow T(\alpha))) \rightarrow \forall\alpha T(\alpha)$, és a rekurzió, mint a műveletek fenti definiciója. (Ezeket transzfinit indukciónak és rekurziónak hívjuk.) A véges rendszámokat azonosítjuk az alaphalmaz méretével, mert véges halmazok csak egy féle képpen jólrendezhetőek. Megszámlálható rendszám azonban már nagyon sok (nem megszámlálható) van. A legkisebb végtelen rendszámot hívjuk ω-nak.

Érdemes felfigyelni arra, hogy a test szokásos definiciójában szerepel a testelemek halmaza, a rendszámok pedig nem alkotnak halmazt. A test most egy osztályon van adva, így a műveletek sem függvények, ez azonban semmilyen zavart nem okoz. Ha valakit mégis zavar, akkor szorítkozzon a megszámlálható rendszámokra.