Keresési feladatok

Olyan problémákkal foglalkozunk, amikor egy adathalmazban meg kell keresni a legnagyobb, legkisebb, második legnagyobb, stb. elemet. Fő célunk *alsó* becslések keresése. Egy tipikus eredmény a következő:

A minimális és maximális elem együttes megkereséséhez n elem közül legalább $\frac{3n}{2} - 2$ összehasonlítás kell,

Érintjük n elem rendezéséhez szükséges műveletek számára vonatkozó becslést, és azt a meglepő eredményt is, hogy n elemet lehet $O\left(\frac{n \log n}{\log \log n}\right)$ művelettel is rendezni. Ha marad idő, az alábbi feladatot is megoldjuk:

Egy matematikai kongresszuson 200 küldött vesz részt, ezek mindegyike vagy őrült vagy normális. A normális matematikusok mindig igazat mondanak, az őrültek megbízhatatlanok: válaszuk lehet igaz is és hamis is. A résztvevők többsége normális. Egy újságírónak meg kell tudnia, hogy kik a normálisok. E célból bárkihez odamehet és megkérdezheti rámutatva valaki másra: "Ő normális vagy őrült?" Választ mindig kap, és ennek igazsága attól függ, hogy a kérdezett normális-e vagy sem.

Hány kérdést kell feltennie ahhoz, hogy mindent megtudjon?

Mutassuk meg, hogy ha n résztvevő van, és a többség normális, akkor konstans $\times n$ kérdés elegendő ehhez. Ha ugyanannyi a normális és az őrült résztvevők száma, akkor lehetetlen akárhány kérdés segítségével biztosan kideríteni az igazságot. Annak pontos meghatátozása, hogy hány kérdés kell legalább a helyzet tisztázásához, (ha több a normális mint az őrült), lényegesen nehezebb, de megoldható probléma.

Csirmaz László

Feladatok

1. Egy kieséses versenyben n résztvevő közül eldöntik, hogy ki a *harmadik* legjobb. Hány mérkőzésre kerül sor? És ha a k-adik legjobbra vagyunk kiváncsiak?
2. A következő algoritmus kiválasztja a legnagyobb és a második legnagyobb értéket $L[1], \ldots, L[n]$ közül. Hány összehasonlítást végez a legrosszabb esetben, illetve átlagosan?

   max: $= \max\{L[1], L[2]\}$;
   second: $= \min\{L[1], L[2]\}$;
   for $i := 3$ **to** n **do**
   if $L[i] >$ second **then**
   if $L[i] >$ max **then** second: $=$ max; max: $= L[i]$;
   else second: $= L[i]$;

3. Mutassuk meg, hogy 5 elem közül a középsőt 6 összehasonlítással mindig ki lehet választani.

4. n elem közül a 10 legkisebb bármelyike jó. Hány összehasonlítással tudunk egy ilyet találni?
5. Az M $n \times n$ mátrix minden sorában az elemek csökkennek, és minden oszlopában az elemek szintén csökkennek. Meg kell állapítanunk, hogy egy x szám szerepel-e a mátrixban. Egy lépésben x-et összevethetjük M tetszőleges elemével, és megkapjuk, hogy egyenlő, kisebb vagy nagyobb-e nála. Hány lépést kell tennünk?
6. Egy útkereszteződéshez érünk, ahol az egyik út a pokolba a másik pedig a paradicsomba vezet. Az úton három ikertestvér áll, akik minden igen vagy nemmel megválaszolható kérdésre válaszolnak. Egyikük mindig igazat mond, a második mindig hazudik. A harmadik testvér süket, de ezt titkolja, azaz mindig válaszol valahogy a kérdéstől teljesen függetlenül. Állapítsuk meg két kérdés segítségével azt, hogy melyik út vezet a paradicsomba.