Feladatok:

Az első két feladatban a Komlós János előadásában szereplő, az elágazó folyamatokról szóló állítások bizonyítása. Az első feladatban megadjuk az elágazó folyamat kihalásának a valószínűségét. A másodikban bizonyítjuk azt az állítást, hogy két elágazó folyamatnak Poisson eloszlású születésszámmal megegyezik a feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal, feltéve, hogy a két folyamatban szereplő Poisson eloszlás paramétere között bizonyos reláció teljesül. (Ez volt az az állítás, melyről az előadó megjegyezte, hogy valószínűleg sokan ismerik, de az irodalomban nem találta meg.)

Emlékeztetőül: Egy elágazó folyamatban a kezdeti null időpontban egy ős él, akinek az egy időpntban véletlen (egész) számú utóda születik $F(x)$ eloszlással. Legyen X_n az utódok száma az n időpontban. Ezek mindegyikének születik véletlen számú utóda egymástól függetlenül $F(x)$ eloszlással az $n+1$ időpontban. Ezek számának az összege az $n+1$ időpontban élő utódok X_{n+1} száma. Azt mondjuk, hogy az elágazó folyamat kihal az n időpontig, ha $X_n = 0$. (Ekkor $X_m = 0$ minden $m \geq n$-re.) Az elágazó folyamatnak a születésszáma Poisson eloszlású λ paraméterrel, ha az $F(x)$ eloszlás Poisson eloszlású λ paraméterrel, azaz egy $F(x)$ eloszlású ξ valószínűségi változóra $P(\xi = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

1.) Adva egy μ mérték a nem-negatív egész számokon, melyre $\mu(n) = p_n$ definiáljuk az e mértékhez tartozó $H(x) = H_\mu(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ generátorfüggvényt. Legyen $G(x)$ az elágazási folyamat definicójában szereplő $F(x)$ eloszlás ($F(x)$ annak az eloszlása, hogy az egyes egyedeknek hány utóda születik) által meghatározott mérték generátorfüggvénye, és μ_n az n időpontban élő utódok X_n számának az eloszlása. Lássuk be, hogy a μ_n mérték generátorfüggvénye $G^{(n)}(x)$, a $G(x)$ függvény n-ik iterációja, azaz $G^{(n)}(x) = \underbrace{G(G(\cdots(G}_{n}(x)\cdots))$. Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy az elágazó folyamat az n időpontig kihal $G^{(n)}(0)$. Lássuk be, hogy $G(x)$ monoton, konvex függvény, $G(1) = 1$, és $G'(1) = \nu$ egy $F(x)$ eloszlású valószínűségi változó várható értéke. Annak valószínűsége, hogy az elágazó folyamat kihal egyenlő $\lim\limits_{n\to\infty} G^{(n)}(0)$-val, ami a $G(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, egyenlet kisebb megoldása. Az elágazó folyamat akkor és csak akkor hal ki egy valószínűséggel, ha $\nu \leq 1$.

2.) Mutassuk meg, hogy egy elágazó folyamat λ paraméterű Poisson eloszlású születésszámmal Markov folyamat $p(j,k) = \dfrac{(j\lambda)^k}{k!} e^{-j\lambda}$ átmenetvalószínűséggel, ha $j \geq 1$. Annak valószínűsége, hogy a folyamat az $n+1$ időpontban hal ki, és az r időpontban, $1 \leq r \leq n$, $l_r \geq 1$ számú utód él, $C(l_1, \dots, l_n) e^{-\lambda} (\lambda e^{-\lambda})^{l_1 + \cdots + l_n}$ alkalmas $C(l_1, \dots, l_n)$ számmal. Ezért annak a feltételes valószínűsége, hogy a folyamat az $n+1$ időpontban kihal, és az r időpontban $l_r \geq 1$ számú utód él, kifejezhető, mint az l_r, $1 \leq r \leq n$ és a $\lambda e^{-\lambda}$ számok függvényeként. Legyenek λ és φ olyan valós számok, melyekre $\lambda e^{-\lambda} = \varphi e^{-\varphi}$. Tekintsük az elágazó folyamatokat Poisson eloszlású születésszámmal λ illetve φ paraméterekkel. Lássuk be először azt, hogy a két folyamat kihalási idejének a feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal megegyezik. Lássuk be, hogy ennél élesebb állítás is igaz. A két folyamat feltételes eloszlása megegyezik azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal.

A következő két feladatban egy a Beck József előadásában javasolt feladatot, illetve egy ahhoz kapcsolódó állítást vizsgálunk. Legyen adva egy x_n, $0 \le x_n \le 1$, $n = 1, 2, \dots$, számsorozat. Azt mondjuk, hogy ez az eloszlás egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban, ha tetszőleges $0 \le a < b \le 1$ számokra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{k\colon 1 \le k \le n,\ a \le x_k \le b\} \to b - a\ ,$$

ahol $\#(A)$ jelöli az A halmaz számosságát.

3.) Az x_n sorozat akkor és csak akkor egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban, ha minden k egész számra, $k \ne 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} e^{2\pi i k x_p} = 0\ .$$

(Weyl lemma.)

4.) Ha α irracionális szám, akkor az $n^2\alpha \bmod (1)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban.

Beck József által javasolt segítség: Azt kell belátni, hogy tetszőleges $k \ne 0$ egész számra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{p=1}^{n} e^{2\pi i k\alpha p^2} \to 0$ vagy, ami ezzel ekvivalens:

$$\begin{aligned} I(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{p=1}^{n} e^{2\pi i k\alpha p^2} \right|^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} e^{2\pi i k\alpha(p^2-q^2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} e^{2\pi i k\alpha(p-q)(p+q)} = 0 \end{aligned}$$

Vezessük be a $p + q = r$ és $p - q = s$ új változókat, és összegezzünk először a $r = p + q$ változóra rögzített $s = p - q$-ra, és becsüljük meg a $J(k, s, n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{r=s+2}^{2n-s} e^{2\pi i k s\alpha r}$ összeget. Ez egy geometriai sor, amelyiket összegezve látjuk, hogy a kifejezés rögzített k-ra és s-re $n \to \infty$ esetén nullához tart. Próbáljuk meg ennek alapján megoldani a feladatot.

További észrevételek: Ha a fenti összegre s-ben egyenletes konvergenciát tudnánk biztosítani, az elég volna a feladat megoldásához. Ezt azonban nem tudjuk, mert a geometriai összegben megjelenik az $1 - e^{2\pi k s\alpha}$ nevező. Ezért a $J(k, s, n)$ kifejezések természetes becslése alapján nem magától értetödő, hogy valóban $I(k) = 0$. Hogyan birkozunk meg ezzel a nehézséggel? Egy lehetőség: Vegyük észre, hogy $|J(k, n, s)| \le 2$, és mivel a $ks\alpha$ sorozat egyenletes eloszlású (rögzített k-ra és α-ra), azon s számok, melyek esetén nem tudunk a $J(k, s, n)$ kifejezésre jó becslést adni ritkán vannak. Dolgozzuk ki a részleteket!

A 4. feladatnak nem triviális általánosításait is lehet bizonyítani. Igaz a következő állítás: Ha az x_n, $0 \leq x_n \leq 1$, sorozat olyan, hogy az $x_{n+s} - x_n \bmod 1$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat minden rögzített s-re egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumban, akkor az eredeti x_n sorozat is egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumban. Ebből viszonylag egyszerű levezetni a következő Weyltől származó eredményt: Legyen $P(x)$ egy polinom, melynek legalább az egyik együtthatója irracionális. Ekkor az $x_n = P(n) \bmod (1)$ sorozat egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumban.