Valószínűségszámítási módszerek a kombinatorikában

1. Legyen H egy legfeljebb $2^{r-1}-1$ élű r-uniform hipergráf. Bizonyítsuk be, hogy a pontok 2 színnel színezhetők úgy, hogy minden r pontú élben mindkét szín előfordul.
2. Bizonyítsuk be, hogy az $R_2(n,n)$ Ramsey szám legalább $2^{n/2}$.
3. Bizonyítsuk be, hogy az $1,2,,\dots,2^{k/2}$ számok 2 színnel színezhetők úgy, hogy ne legyen k tagú monokromatikus számtani sorozat.

Beszélünk az 1997 Schweitzer verseny 1. feladatának (i.) részéről, illetve a megoldás gerincét alkotó Lovász lokális lemmáról és annak bizonyításáról. A Schweitzer feladat:

> Definiáljuk minden k pozitív egész számra gráfoknak egy $\mathcal{G}_k$ osztályát a következő módon. Egy $G=(V,E)$ gráf pontosan akkor eleme $\mathcal{G}_k$-nak, ha létezik éleinek olyan $\psi\colon E\to[k]=\{1,2,\dots,k\}$ színezése, hogy a csúcsok tetszőleges $\varphi\colon V\to[k]$ színezése esetén található a gráfnak olyan $e=\{x,y\}$ éle, melyre $\varphi(x)=\varphi(y)=\psi(e)$.
> Bizonyítsuk be, hogy léteznek $c_1<c_2$ pozitív konstansok az alábbi két tulajdonsággal:
>
> (i) minden $\mathcal{G}_k$-beli gráfnak legalább c_1k^2 csúcsa van;
>
> (ii) van $\mathcal{G}_k$-ban olyan gráf, melynek legfeljebb c_2k^2 csúsa van.

A tárgyalandó (i) rész állítása így is fogalmazható: Ha egy gráf csúcsainak száma kisebb, mint c_1k^2 ($c_1=\frac{1}{8}$ választás például megfelelő), és a gráf éleit kiszínezzük k színnel valamilyen módon, akkor a gráf csúcsainak létezik olyan kiszínezése ezzel a k színnel úgy, hogy e színezéssel a gráf minden élére igaz a következő állítás: Az élnek és az él két végpontjában levő csúcsoknak a színe (azaz három helyen lévő szín) mindegyike nem egyezhet meg. Lássuk be az alább megfogalmazott és tárgyalandó Lovász lokális lemma segítségével a követező eredményt: Ha minden csúcsot egymástól függetlenül kiszínezünk k színnel, minden színt egyforma valószínűséggel választva, akkor pozitív annak a valószínűsége, hogy valamelyik színezés teljesíti a kívánt tulajdonságot.

A Lovász lokális lemma célja jól használható feltételt adni arra, hogy pozitív legyen annak a valószínűsége, hogy bízonyos események mindegyike bekövetkezik. Olyan feltételt fogalmaz meg, mely akkor is alkalmazható, amikor a tekintett események nem teljesen (csak majdnem teljesen) függetlenek, és az események együttes bekövetkezésének a valószínűsége kicsi is lehet.

Lovász lokális lemma: *Legyenek $A_1,\dots,A_n$ események egy valószínűségi mezőn, d egy egész szám, melyek teljesítik a következő feltételeket:*

1. $P(A_j)\le\dfrac{1}{4d}$ *minden* $j=1,\dots,n$*-re*

2. Lehet olyan gráfot definiálni, melynek csúcsai az $\{1,2,\dots,n\}$ pontok, minden pont fokszáma kisebb vagy egyenlő d-vel, és amennyiben valamilyen az i pont a $j_1,\dots,j_k$

pontok egyikével sincs összekötve, akkor az A_i esemény független az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ események együttesétől (azaz az $A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}$ események minden függvényétől).

Ekkor $P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_n) > 0$, ahol $\bar{A}_i$ az A_i esemény komplementere.

4. Bizonyítsuk be a Lovász lemmát, illetve ennek segítségével a Schweitzer verseny első feladatának (i) részét.
   Segítség: Bizonyítsuk be k szerinti teljes indukcióval, hogy

$$P(A_j|\bar{A}_{i_1} \cdots \bar{A}_{i_k}) = \frac{P(A_j \bar{A}_{i_1} \cdots \bar{A}_{i_h} | \bar{A}_{i_{h+1}} \cdots \bar{A}_{i_k})}{P(\bar{A}_{i_1} \cdots \bar{A}_{i_h} | \bar{A}_{i_{h+1}} \cdots \bar{A}_{i_k})} \leq \frac{1}{2d},$$

   ahol $i_1, \ldots, i_h$ azok a pontok az $i_1, \ldots, i_k$ pontok közül, amelyek a tekintett gráfban össze vannak kötve a j ponttal.