Feladatok

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, $f(x,y)$ olyan függvény, melyre $E|f(\xi,\eta)|<\infty$. Bizonyítsuk be, hogy $E(f(\xi,\eta)|\eta=y)=Ef(\xi,y)$. Mi ennek az állításnak a szemléletes tartalma?

2.) Az előző állítás jobb megértése érdekében mutassuk meg, hogy az állítás következik a Fubini tételből. Azaz, használjuk fel a következő eredményt: Legyen adva két mértéktér $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ és az $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mu\times\nu)$ szorzattér a szorzatmértékkel, továbbá egy mérhető $f(x,y)$ függvény a szorzattéren. Akkor tetszőleges mérhető $B\subset X$-re

$$\int_{B\times Y} f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)=\int_B g(x)\mu(dx)\ ,$$

ahol $g(x)=\int f(x,y)\nu(dy)$. Mutassuk meg alkalmas transzformáció segítségével, hogy az előző állítás következik ebből az eredményből.

3.) Bizonyítsuk be az 1. feladat következő általánosítását. Legyen adva egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn egy $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ σ-algebra és két ξ illetve η valószínűségi változó, melyekre η $\mathcal{F}$ mérhető, és ξ független az $\mathcal{F}$ σ-algebrától. Lássuk be, hogy tetszőleges mérhető $f(x,y)$ függvényre, melyre $E|f(\xi,\eta)|<\infty$

$$E(f(\xi,\eta)|\mathcal{F})(\omega)=Ef(\xi,y)|_{y=\eta(\omega)}\ .$$

4.) Legyen $\xi(t)$, $t\in T$, valószínűségi változóknak a halmaza valamilyen T indexhalmazzal indexelve, egy η valószínűségi változó és egy $\mathbf{A}$ esemény valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn úgy, hogy informálisan megfogalmazva, az $\mathbf{A}$ esemény feltételes valószínűsége feltéve a ξ_t valószínűségi változók bármely véges részhalmazának és az η valószínűségi változó értékét csak az η valószínűségi változótól függ. Azaz, tegyük fel, hogy $P(\mathbf{A}|\sigma(\xi_{t_1},\dots,\xi_{t_k},\eta))=P(\mathbf{A}|\eta)$ tetszőleges $\{t_1,\dots,t_k\}\subset T$ véges halmazra. Ekkor $P(\mathbf{A}|\sigma(\xi_t,t\in T,\eta))=P(\mathbf{A}|\eta)$.

A következő feladat célja az, hogy egyszerű módon konstruáljunk Poisson folyamatokat.

5.)

a) Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j\ge 0$ valószínűséggel esik, $j=1,\dots,k$, $\sum\limits_{j=1}^k p_j=1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Bizonyítsuk be, hogy az η_j, $j=1,\dots,k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j=1,\dots,k$.

b.) Legyen adva egy $(X,\mathcal{A})$ mérhető tér, és azon egy μ valószínűségi mérték. Legyen ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel, Válasszunk egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül $x_1,\ \dots\ ,\ x_\xi$ pontokat az X téren úgy, hogy $P(x_j\in\mathbf{A})=\mu(\mathbf{A})$ minden $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$ és $j=1,\dots,\xi$-re. Lássuk be, hogy tetszőleges diszjunkt $\mathbf{A}_1\in\mathcal{A},\ \dots\ ,\ \mathbf{A}_k\in\mathcal{A}$ halmazokra az e halmazokba eső kiválasztott x_l pontok száma egymástól független, és az egyes $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \dots, k$, halmazokba eső pontok száma $\lambda\mu(\mathbf{A}_j)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

c.) Legyen adva egy $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és rajta egy ν σ-véges mérték. Az elöző konstrukciót felhasználva konstruáljunk egy olyan $x_1, x_2, \dots$ véletlen pontrendszert az X téren, mely teljesíti a következő tulajdonságot: Bármely mérhető véges ν mértékű $\mathbf{A}$ halmazba eső pontok száma $\nu(\mathbf{A})$ mértékű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és diszjunkt (mérhető, véges mértékű) halmazokba eső pontok száma egymástól független.

6.) Legyen $W(t)$ (standard) Wiener folyamat. Rögzítsünk bizonyos $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < 1$ számokat. Bizonnyítsuk be, hogy a $W(t_1), \dots, W(t_k)$ feltételes eloszlása $W(1) = x$ feltétel mellett egy $d_{j,l} = d_{l,j} = t_j(1 - t_l)$, $1 \le j \le l \le k$, kovarianciamátrixú és $m_j = t_j x$, $1 \le j \le k$ várható értékű normális eloszlású vektor. A $W(t)$, $0 \le t \le 1$, folyamat feltételes eloszlása feltéve, hogy $W(1) = x$, megegyezik a $B(t) + tx$ eloszlásával, ahol $B(t)$ Brown bridge.

7.) Egy Komogorovtól származó eredmény szerint, ha az $X(t)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat teljesíti az $E|X(t) - X(s)|^{2+\delta} \le C|t - s|^{1+\varepsilon}$ feltételt valamely $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ és $C > 0$ számokkal, akkor létezik olyan $\bar{X}(t)$ egy valószínűséggel folytonos trajektóriájú folyamat a $[0, 1]$ intervallumon, melyre $P(\bar{X}(t) = X(t)) = 1$ minden $t \in [0, 1]$-re. Általánosítsuk ezt az eredményt arra az esetre, amikor az $X(t)$ sztochasztikus folyamat a $t \in [0, 1]^k$ van értelmezve. Ennek megfogalmazásához vezessük be a következő jelöléseket: Ha $\Delta = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset [0, 1]^k$ egy k-dimenziós téglatest, akkor $|\Delta| = \prod\limits_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$, az $X(t)$ megváltozása a Δ-n $X(\Delta) = \sum\limits_{\substack{t_j = a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(t_1,\dots,t_k)} X(t_1, \dots, t_k)$, ahol $\chi(t_1, \dots, t_k) = \#\{j \colon t_j = a_j,\ 1 \le j \le k\}$. Ha $E|X(\Delta)|^{2+\delta} \le C|\Delta|^{1+\varepsilon}$ valamely $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ és $C > 0$-ra, akkor létezik olyan $\bar{X}(t)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat a $[0, 1]^k$-n, melyre $P(\bar{X}(t) = X(t)) = 1$ minden $t \in [0, 1]^k$-ra.

Megoldások, megoldásvázlatok

1.) Lássuk be az állítást először abban az esetben, amikor $f(x,y)=I_{\mathbf{A}}(x)I_{\mathbf{B}}(y)$, ahol $I_{\mathbf{C}}(\cdot)$ jelöli a $\mathbf{C}$ halmaz indikátorfüggvényét, és $\mathbf{A}\subset R^1$ illetve $\mathbf{B}\subset R^1$ tetszőleges Borel mérhető halmazok. Ekkor a feltételes várható érték tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned}E(f(\xi,\eta)|\eta=y)&=E(I_{\mathbf{A}}(\xi)I_{\mathbf{B}}(\eta)|\eta=y)=I_{\mathbf{B}}(y)E(I_{\mathbf{A}}(\xi|\eta=y)\\&=I_{\mathbf{B}}(y)EI_{\mathbf{A}}(\xi)=EI_{\mathbf{B}}(y)I_{\mathbf{A}}(\xi)=Ef(\xi,y)\ .\end{aligned}$$

Az azonosság a várható érték és a feltételes várható érték lineáris tulajdonsága miatt következik a fenti formulából abban az esetben, ha az $f(x,y)$ függvény $f(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{k}I_{\mathbf{A}_j}(x)I_{\mathbf{B}_j}(y)$ alakú. Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az $\mathbf{A}_j\times\mathbf{B}_j$ halmazok diszjunktak. Jelölje $\mathcal{D}$ azon $\mathbf{D}\subset R^2$ halmazok osztályát, melyekre $EI_{\mathbf{D}}(\xi,y)=E(I_{\mathbf{D}}(\xi,\eta)|\eta=y)$. Tudjuk, hogy $\mathcal{D}$ tartalmazza a véges sok diszjunkt téglalapból álló halmazokat. Továbbá a várható érték és feltételes várható érték tulajdonságai miatt $\mathcal{D}$ monoton halmazosztály, azaz rendelkezik a következő tulajdonságokkal: Ha $\mathbf{D}_1\subset\mathcal{D}$, $\mathbf{D}_2\subset\mathcal{D}$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ diszjunktak, akkor $\mathbf{D}_1\cup\mathbf{D}_2\subset\mathcal{D}$, és $\mathbf{D}_j\in\mathcal{D}$, $\mathbf{D}_j\subset\mathbf{D}_{j+1}$, $j=1,2,\dots$, akkor $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\mathbf{D}_j\subset\mathcal{D}$. Általános mértékelméleti eredmények szerint egy a téglalapokat (általában egy halmazgyűrűt) tartalmazó monoton halmazosztály tartalmazza a Borel σ-algebrát (a halmazgyűrű által generált σ-algebrát). Ezért a bizonyítandó azonosság igaz akkor, ha az $f(x,y)$ függvény egy mérhető halmaz indikátorfüggvénye. Felhasználva a várható érték és feltételes várható érték tulajdonságait kapjuk, hogy a kívánt azonosság igaz tetszőleges lépcsősfüggvényre, illetve azután határátmenettel kapjuk, hogy igaz olyan $f(x,y)$ függvényre, melyre $E|f(\xi,\eta)|<\infty$.

2.) Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, és az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G(x)$. Definiáljuk az $R^2=R^1\times R^1$ szorzatteret a $\mu(dx,dy)=F(dx)G(dy)$ szorzatmértékkel, továbbá a $\mathbf{T}\colon(\Omega,\mathcal{A},P)\to(R^2,\mathcal{B},\mu)$ mérhető leképezést a $\mathbf{T}(\omega)=(\xi(\omega),\eta(\omega))$ képlettel. Ez a $\mathbf{T}$ leképezés mértéktartó, azaz tetszőleges $\mathbf{B}\subset R^2$ mérhető halmazra $\mu(\mathbf{B})=P(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B})$. Annak megállapításához, hogy a $\mathbf{T}$ leképezés mértéktartó elég ellenőrizni azt hogy $\mu(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=P(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}))$ tetszőéleges $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\subset R^2$ tipusú halmazra, ami a feltételekből könnyen adódik.

Írjuk át a bizonyítandó formulát az előbbi transzformáció segítségével az $(R^2,\mathcal{A},\mu)$ térre. A bizonyítandó állítás ekvivalens az

$$\int_{\eta\in\mathbf{C}}f(\xi,\eta)\,dP=\int_{\eta\in\mathbf{C}}Ef(\xi,y)|_{y=\eta}\,dP$$

azonossággal tetszőleges mérhető $\mathbf{C}\in R^1$ halmazra. Ez pedig ekvivalens, a $\mathbf{T}$ transzformáció mértéktartó tulajdonsága miatt az

$$\int_{R^1\times\mathbf{C}}f(x,y)\mu(\,dx,\,dy)=\int_{\mathbf{C}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)F(\,dx)\right)G(\,dy)$$

azonossággal, és az utolsó állítás a Fubini tétel következménye.

3.) Az első feladatnak mind a két bizonyítása módosítható úgy, hogy megadja ennek a feladatnak a bizonyítását. Az első bizonyításban szinte semmit sem kell változtatni. A második bizonyításban a $\mathbf{T}\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (R^1 \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{F}, \mu_F \times P)$, $\mathbf{T}(\omega) = (\xi(\omega), \omega)$, leképezést tekintjük, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra R^1-en és μ_F a ξ valószínűségi változó F eloszlása által meghatározott mérték. Ekkor a $\mathbf{T}$ transzformáció mértéktartó. Ennek a tulajdonságnak az ellenőrzésekor elég a $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ alakú halmazokat és azok ősképét elég vizsgálni, ahol $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ és $\mathbf{C} \in \mathcal{F}$. Fontos: A $\mathbf{C}$ halmaznak csak $\mathcal{F}$ mérhetőnek kell lenni és nem feltétlenül $\mathcal{A}$ mérhetőnek. Innen kapjuk, a második bizonyítás érvelését használva, hogy egy a $[0,1] \times \Omega$-n definiált $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ mérhető $H(x, \omega)$ függvényre $E(H(\xi, \omega)|\mathcal{F})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x, \omega)dF(x)$. Ezt az összefüggést a $H(x, \omega) = f(x, \eta(\omega))$ függvényre alkalmazva megkapjuk a kívánt állítást.

4.) Mivel a $P(\mathbf{A}|\eta)$ valószínűségi változó $\sigma(\xi_t, t \in T, \eta)$ mérhető a bizonyítandó állítás ekvivalens a következővel:

$$\int_{\mathbf{B}} P(\mathbf{A}|\eta)\, dP = P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

tetszőleges $\mathbf{B} \in \sigma(\xi_t, t \in T, \eta)$ és $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ halmazra. Rögzítsk az $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ halmazt. A feladat feltételei miatt a kívánt azonosság igaz minden $\mathbf{B} \in \sigma(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k}, \eta)$ halmazra, ahol $\{t_1, \dots, t_k\}$ a T paraméter halmaz tetszőleges véges részhalmaza. Mivel a bizonyítandó azonosság mindkét oldala σ-additív mint a $\mathbf{B} \in \mathcal{A}$ halmazokon értelmezett fggvény, ezért a mértékek kiterjesztésének egyértelműsége miatt egy halmazgyűrűről az általa generált σ-algebrára az azonosság igaz minden $\mathbf{B} \in \sigma(\xi_t, t \in T, \eta)$ halmazra.

5.) a.)

$$\begin{aligned} P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \cdots + l_k) \frac{(l_1 + \cdots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \\ &= \frac{\lambda^{(l_1 + \cdots + l_k)}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j} \end{aligned}$$

tetszőleges $l_1 \ge 0, \dots, l_k \ge 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

b.) Legyen $\mathbf{A}_{k+1} = X \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \mathbf{A}_j$, $p_j = \mu_j(\mathbf{A}_j)$, $j = 1, \dots, k+1$. Ekkor a feladat a.) része szerint az egyes $\mathbf{A}_j$ halmazokba eső pontok száma egymástól független $\lambda\mu(\mathbf{A}_j)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

c.) Tekintsük az X halmaznak egy particióját, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, az X_j, $j = 1, 2, \dots$, halmazok diszjunktak, $\mu(X_j) = \lambda_j < \infty$. Konstruáljunk a b.) feladat felhasználásával mindegyik X_j halmazon egy olyan pontrendszert (véletlen számú pontot dobva le $\mu(X_j)$ paraméterű Poisson eloszlással egymástól függetlenül úgy, hogy egy pont egy $\mathbf{A}_j \subset X_j$ halmazba

$\dfrac{\mu(\mathbf{A}_j)}{\mu(X_j)}$ valószínűséggel essék), hogy egy $\mathbf{A}_j \subset X_j$ halmazba eső pontok száma legyen $\mu(\mathbf{A}_j)$, paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és diszjunkt halmazokba egymástól független számú pont essék. Legyenek a különböző X_j halmazokba eső pontok száma egymástól független. Mivel független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege Poisson eloszlású, és az összeg paramétere egyenlő az összeadandók paraméterének az összegével, ezért az itt leírt konstrukcióban tetszőleges $\mu(\mathbf{A}) < \infty$ mértékű halmazba $\mu(\mathbf{A})$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó esik, és diszjunkt halmazokba eső pontok száma egymástól független. (Lássuk be, hogy végtelen sok független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson eloszlású, és az összeg paramétere megegyezik az összeadandók paraméterének az összegével, feltéve, hogy ez az összeg véges. Ennek bizonyításánál érdemes észrevenni, hogy ebben az esetben az összeg 1 valószínűséggel, ezért eloszlásban is konvergál.)

6.) A $W(t) - tW(1)$, $0 \le t \le 1$, folyamat független a $W(1)$ valószínűségi változótól, mert korrelálatlanok, és a $W(t_j) - t_jW(1)$, $j = 1, \dots, k$, és $W(1)$ valószínűségi változók együttesen normális eloszlásúak tetszőleges k pozitív egész számra és $0 \le t_1 < \cdots < t_k \le 1$ számokra. Ezért a $W(t_j) = (W(t_j) - t_jW(1)) + t_jW(1)$, $j = 1, \dots, k$ vektor feltételes eloszlása $W(1) = x$ feltétel esetén megegyezik a $W(t_j) - t_jW(1) + t_jx$, $j = 1, \dots, k$ vektor eloszlásával. Hogyan következik ez az állítás az első feladat többdimenziós változatából? Ily módon bebizonyítottuk a feladat első állítását. A feladat második, a folyamatokra vonatkozó állítása ekvivalens a következő két állítással: A $C([0,1])$ tér tetszőleges (Borel) mérhető $\mathbf{A}$ halmazára és a számegyenes (Borel) mérhető $\mathbf{B}$ részhalmazára az $F(u) = F_{\mathbf{A}}(u) = P(\{\omega\colon (B_0(t,\omega) + tu,\ 0 \le t \le 1) \in \mathbf{A}\})$ függvény mérhető, és

$$\int_{u\in\mathbf{B}} P(\{\omega\colon (B_0(t,\omega) + tu,\ 0 \le t \le 1) \in \mathbf{A}\})\varphi(u)\,du$$
$$= P(\{(\omega\colon W(t,\omega),\ 0 \le t \le 1) \in \mathbf{A}\} \cap \{W(1) \in \mathbf{B}\})\ ,$$

ahol $B_0(\cdot)$ a Brown bridge-t és $\varphi(\cdot)$ a standard normális sűrűségfüggvényt jelöli. A feladat első, már bizonyított feléből következik, hogy ez a két állítás igaz abban a speciális esetben, amikor $\mathbf{A}$ hengerhalmaz, azaz a következő alakú: $\mathbf{A} = \{x(t),\ 0 \le t \le 1\colon x(\cdot) \in C([0,1]),\ x(t_j) \in \mathbf{B}_j,\ j = 1, \dots, k\}$ valamilyen pozitív egész k-ra, $0 \le t_1 < \cdots < t_k$ pontokra, és $\mathbf{B}_j$, $j = 1, \dots, k$ mérhető halmazokra.

Az $F_{\mathbf{A}}(\cdot)$ függvény mérhető, ha az $\mathbf{A}$ halmaz hengerhalmaz, és az olyan $\mathbf{A}$ halmazok, melyekre $F_{\mathbf{A}}(\cdot)$ mérhető függvény, monoton halmazosztályt alkotnak, ezért az ilyen halmazok tartalmazzák a hengerhalmazok által generált legszűkebb σ-algebrát, ami egybeesik a $C([0.1])$ tér Borel mérhető halmazaival.

Annak érdekében, hogy belássuk azt, hogy a felírt azonosság igaz tetszőleges mérhető $\mathbf{A}$ halmazra, rögzítsünk egy Borel mérhető $\mathbf{B}$ halmazt a számegyenesen, és definiáljuk a $\mu_1(\mathbf{A}) = \int_{u\in\mathbf{B}} P(\{\omega\colon (B_0(t,\omega) + tu,\ 0 \le t \le 1) \in \mathbf{A}\})\varphi(u)\,du$ és $\mu_2(\mathbf{A}) = P(\{(\omega\colon W(t,\omega),\ 0 \le t \le 1) \in \mathbf{A}\} \cap \{W(1) \in \mathbf{B}\}$ halmazfüggvényeket. Mivel mind μ_1 mind μ_2 mérték a $C([0,1])$ tér mérhető részhalmazain, és $\mu_1(\mathbf{A}) = \mu_2(\mathbf{A})$, ha $\mathbf{A}$ hengerhalmaz, ezért $\mu_1 = \mu_2$, és ez a bizonyítandó azonosság.