Feladatmegoldás:

Példa olyan gráfelméleti függvényre, amelyik minden racionális pontban szakad.

Egy $\frac{1}{2} \le \frac{p}{q} < 1$ racionális számnak tekintsük a következő szorzatreprezentációját, melyet nevezzünk mohó reprezentációnak:

$$\frac{p}{q} = \frac{k_1 - 1}{k_1} \cdot \frac{k_2 - 1}{k_2} \cdots \frac{k_r - 1}{k_r}$$

ahol $k_i > (k_{i-1} - 1)^2$, $i = 1, 2, \ldots, r - 1$-re.

1.) Bizonyítsuk be, hogy minden $\frac{1}{2} \le \frac{p}{q} < 1$ racionális számnak van mohó reprezentációja, és az egyértelmü.

Az 1. feladat állítását elfogadva értelmes a következő definició:

Egy $\frac{1}{2} \le \frac{p}{q} < 1$ racionális számra legyen

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{k_1 - 2}{k_1} \cdot \frac{k_2 - 2}{k_2} \cdots \frac{k_r - 2}{k_r} ,$$

ahol $\frac{p}{q} = \frac{k_1 - 1}{k_1} \cdot \frac{k_2 - 1}{k_2} \cdots \frac{k_r - 1}{k_r}$ a racionális szám mohó reprezentációja.

2.) Bizonyítsuk be, hogy a függvény irracionális $\frac{1}{2} < x < 1$ számokra is határértékként kiterjeszthető, a következő módon:

$$f(x) = \lim_{\frac{p}{q} \to x} f\left(\frac{p}{q}\right) .$$

Azaz, a fenti határérték létezik.

3.) Bizonyítsuk be, hogy a kiterjesztett, az $[1/2, 1)$ intervallumban értelmezett függvény
   (a) szigorúan monoton növekvő,
   (b) minden irracionális pontban folytonos, de
   (c) minden racionális pontban szakadása van, ott csak balról folytonos.