Nem negatív harmonikus függvények a d dimenziós rácson.

A parciális differenciálegyenletek egyik fontos problémája a harmonikus függvények leírása, azaz a $\Delta f(x_1,\dots,x_d)=0$ egyenlet megoldásainak leírása a d-dimenziós tér valamely tartományában, ahol $\Delta=\sum\limits_{j=1}^{d}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Ha az egész n dimenziós téren nem negatív harmonikus függvényeket keressük, akkor ezek csak a konstans függvények. Miért? Adjuk meg az egy pont kivételével harmonikus függvényeket, azaz az $R^d\setminus\{x\}$ halmazon értelmezett harmonikus függvényeket, ahol $x\in R^d$. Miért fontosak a harmonikus függvények vizsgálatában ezeknek a függvényeknek az ismerete?

A harmonikus függvények természetes megfelelője a d-dimenziós $\mathbf{Z}^d$ egész kooridinátájú $\mathbf{Z}^d$ rácson értelmezett függvények között azon szintén harmonikus függvényeknek nevezett $f(n)=f(n_1,\dots,n_d)$, $n=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbf{Z}$ függvények, melyekre

$$\frac{1}{2d}\sum_{j=1}^{d}\left(f(n+e_j)+f(n-e_j)\right)=f(n)$$

minden $n\in\mathbf{Z}^d$ pontban, ahol e_j az az egységvektor, melynek j-ik koordinátája 1 az összes többi koordinátája nulla. A követekező feladatokban belátjuk, hogy az egész téren értelmezett korlátos (vagy általánosabban, nem-negatív) harmonikus függvények korlátosak. Ennek az állításnak a bizonyítása nehezebb mint a diszkrét megfelelőjének.

Ha $f(n)$ korlátos harmonikus függvény a $\mathbf{Z}^d$ rácson, akkor $\varphi(n)=f(n+e_1)-f(n)$ és a $\varphi_L(n)=\sum\limits_{p=1}^{L}\varphi(n+pe_1)$ szintén korlátos harmonikus függvények, sőt a φ_L függvény abszolut értékének szuprémumára lehet az L indextől független becsést adni.

Lássuk be a fenti észrevételek segítségével azt, hogy a $\mathbf{Z}^d$ rácson minden korlátos harmonikus függvény konstans.

Azt, hogy az egész rácson értelmezett nem-negatív, harmonikus függvények is konstansok nehezebb bebizonyítani. A következő feladatokban ezt dolgozzuk ki. A bizonyításban egyrészt belátjuk, hogy az összes nem-negatív harmonikus $f(n)$ függvények, melyekre $f(0)=1$ konvex kompakt halmazt alkotnak egy természetes topológiával. Megmutatjuk, hogy ennek a konvex halmaznak a leírásához elég megadni e halmaz extremális pontjait, és ez csak az $f(n)\equiv 1$ függvényből áll.

1. feladat: Tekintsük a $\mathbf{Z}^d$-n értelmezett függvények terét, $R^{\mathbf{Z}^d}$-t a számegyenesen értelmezett szokásos topológia szorzat topológiájával. Definiáljuk ennek a következő $\mathcal{E}$ részhalmazát:

$$\mathcal{E}=\{f(x),\ x\in\mathbf{Z}^d,\ f(x)\ \text{nem-negatív harmonikus függvény},\ f(0)=1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{E}$ a fenti tér egy konvex, kompakt részhalmaza.

(Egy $\mathcal{E}$ zárt halmaz ebben a térben akkor és csak akkor kompakt, ha minden $x \in \mathbf{Z}^d$-re $\sup_{f \in \mathcal{E}} |f(x)|$ kisebb, mint egy x-től függő szám.)

2. feladat: Egy $f \in \mathcal{E}$ függvényt extremálisnak hívunk az $\mathcal{E}$ halmazban, ha nem írható fel két különböző $f_1 \in \mathcal{E}$ és $f_2 \in \mathcal{E}$ függvény $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, $0 \le \alpha_i \le 1$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, konvex lineáris kombinációjaként. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{Z}^d$-n értelmezett függvények terén (az 1. feladatban szereplő topológiával) egy konvex kompakt halmaz tartalmaz legalább két függvényt, akkor tartalmaz legalább két extremális függvényt.

(Rendezzük el a $\mathbf{Z}^d$ rácspontjait valamilyen sorrendben, és definiáljuk az $\mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \cdots$ halmazokat a következő módon: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{n+1} = \{f\ f \in \mathcal{E}_n,\ f(x_n) = \sup_{g \in \mathcal{E}_n} g(x_n)\}$ vagy $\mathcal{E}_{n+1} = \{f\colon f \in \mathcal{E}_n,\ f(x_n) = \inf_{g \in \mathcal{E}_n} g(x_n)\}$. Mutassuk meg, hogy a $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n$ halmaz az $\mathcal{E}$ halmaz egy extremális függvényéből áll.)

3. feladat: Mutassuk meg, hogy az első feladatban definiált $\mathcal{E}$ halmazban az $f(x) \equiv 1$ az egyetlen extremális függvény.

(Használjuk ki, hogy egy nem-negativ harmonikus függvény eltoltja is az. Írjuk fel az $f(n)$ függvényt az $\dfrac{f(n \pm e_j)}{f(\pm e_j)}$ függvények lineáris kombinációjaként.)