Feladatok

1.) Lássuk be, hogy egy végesen generált idempotens félcsoport véges.
Definiciók: A félcsoport olyan halmaz, melyen van egy kétváltozós, asszociativ művelet. A félcsoport idempotens, ha annak minden a elemére $a^2 = a$.

1b.) Hány eleme lehet maximum egy öt elemmel generált idempotens félcsoportnak? Hogy néz ki egy szabad idempotens félcsoport?

2. Tetszőleges $x_1, \dots, x_k$ számokra és $\varepsilon > 0$-ra létezik végtelen sok olyan $\frac{p_{j,l}}{q_j}$, $l = 1, \dots, k$ törtek közös q_j nevezővel, melyekre

$$\left| x_l - \frac{p_{j,l}}{q_j} \right| \le \frac{1+\varepsilon}{q_j^{(k+1)/k}} \quad \text{minden } l = 1, \dots, k \text{ indexre.}$$

Segitség: Alkalmazzuk a skatulya elvet a $(jx_1 \bmod 1, \dots, jx_k \bmod 1)$ vektorokra, $1 \le j \le n$, aszerint, hogy ezek a vektorok a k-dimenziós egységkocka melyik $\left[\frac{l_1}{N}, \frac{l_1+1}{N}\right) \times \cdots \times \left[\frac{l_k}{N}, \frac{l_k+1}{N}\right)$ részébe esnek alkalmas N számmal.

Az ebben a feladatban megfogalmazott un. Dirichlet tétel fontos szerepet játszott az idei Schweitzer verseny 4. feladatának megoldásában. Arról a fontos speciális esetről, amikor egyetlen számot akarunk jól approximálni kis nevezőjű tört segítségével teljesebb leírást lehet adni a lánctörtek elméletének felhasználásával. Ezt a kérdést tárgyalni fogjuk a későbbiekben a szemináriumon.

Továbbá ismertetni fogjuk az idei Schweitzer verseny 10. feladatának a megoldását. Ez a következőképpen szól:

Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független valószinűségi változók sorozata, $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^2 = \sigma_n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$. Legyen $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, és jelölje $I(A)$ egy A halmaz indikátorfüggvényét. Lássuk be, hogy

$$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} I\left\{ \left(\max_{1\le j\le k} |S_j| > \sqrt{k} \right) \right\} \to 0 \quad 1 \text{ valószinűséggel, ha } n \to \infty.$$