Komplex függvénytan

Egy a komplex számsíkon definiált $F(z)$ egész függvényt nulla rendű exponenciális függvénynek nevezünk, ha

$$|F(z)| \le C(\varepsilon)e^{\varepsilon|z|} \quad \text{minden valós } \varepsilon > 0 \text{ és komplex } z \text{ számra}$$

alkalmas $C(\varepsilon) > 0$ számmal.

1.) Bizonyítsuk be, hogy $F(z)$ akkor és csak akkor nulla rendű exponenciális egész függvény, ha az $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ Taylor sor együtthatói teljesítik a

$$|c_k| \le C(\varepsilon)\frac{\varepsilon^k}{k!} \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ és } k = 0, 1, 2, \ldots\text{-ra}$$

egyenlőtlenséget alkalmas $C(\varepsilon)$ együtthatóval.

2.) Legyen $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ nulla rendű exponenciális egész függvény, és definiáljuk az $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n)z^n$ függvényt. Bizonyítsuk be, hogy

$$f(e^w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^k}{dw^k}\frac{1}{1-e^w} = G(w), \quad \text{ha } \Re w < 0.$$

A $G(w)$ függvény kiterjeszthető $2\pi i$ szerint periodikus függvénnyé, mely analitikus a $2\pi ik$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ pontokkal kipontozott komplex számsíkon.

3.) Ha $F(z)$ analitikus, nulla rendű exponenciális függvény, akkor az $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n)z^n$ analitikusan folytatható a $z \neq 1$ ponttal kipontozott komplex számsíkra.

4.) Ha a_k, $k = 1, 2, \ldots$, pozitív egész számok exponenciálisan ritka sorozata, akkor az $F(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{a_k}\right)$ függvény analítikus, nulla rendű exponenciális függvény, melyre $F(a_k) = 0$ és $F(n) \to \infty$, ha $n \to \infty$, de $n \neq a_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

A fentiek alapján oldjuk meg a következő egy Szegő Gábor által felvetett kérdés alapján megfogalmazott és az 1996. évi Schweitzer verseny 7. feladatában kitűzött problémát:

Konstruáljunk olyan $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($|z| < 1$), az egységkörben reguláris függvényt, amely egy pont kivételével az egységkörvonal minden pontján át analitikusan folytatható, és amelyre az $\{a_n\}$ sorozatnak két torlódási pontja van, a ∞ és egy véges érték.

A komplex függvénytan fontos és nehéz kérdése a következő probléma: Tekintsünk egy analitikus függvényt, melyet egy az egységkörben konvergens hatványsor definiál. Az egységkörvonal mely pontjaiban folytatható ez a függvény analitikusan? A Halász Gábor felajánlotta, hogy erről a kérdésről később előadást tart. Mi most csak néhány egyszerűbb problémát beszélünk meg.

5.) Ha egy hatványsor konvergenciasugara egy, akkor az egységkör határán van olyan pont, amelyikben a hatványsor által definiált függvény nem folytatható analitikusan.

6.) Az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ függvény az egységkör egyetlen pontjában sem folytatható analitikusan. A Petruska György jegyzetében szerepel az Hadamard tétel (bizonyítással) és a Fabri tétel (csak kimondva), melyek elégséges feltételeket adnak arra, hogy egy hatványsor a konvergenciakör határának egyetlen pontjában sem folytatható analitikusan. Hogyan szólnak ezek a tételek?

Egy az egységkörben analitikus és a Fabri tétel szerint sehol sem folytatható analitikus függvény a következő

$$\vartheta(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2}$$

függvény. Ez a függvény fontos például a következő okból: Legyen

$$S_r(n) = \left\{ (x_1, \dots, x_r), \quad \sum_{p=1}^{r} x_p^2 = n \right\},$$

a $\sqrt{n}$ sugarú gömb az r dimenziós térben.

7.)

$$\text{Az } S_r(n)\text{-be eső rácspontok száma} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vartheta(z)^r}{z^{n+1}}\, dz$$

ahol $\mathcal{C}$ tetszőleges egyszerű görbe az egységkörben, mely a nullát a belsejében tartalmazza.

A Fabri tétel megszorítást jelent ennek az integrálási útnak a megválasztásában. Ennek az integrálnak a vizsgálata a számelmélet fontos és nehéz kérdése. Ez lehetséges a híres "Hardy féle circle method" segítségével. Ezzel azonban (legalábbis a jelenlegi szemináriumon) nem foglalkozunk.