A Korteweg-deVries egyenlet vizsgálata

A Korteweg-de Vries egyenlet (az egyik szokásos normálással) a következő:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0\ . \tag{$*$}$$

Fontos, hogy az uu_x tag miatt az egyenlet nem lineáris. Be lehet látni, hogy ennek az egyenletnek az $u(x,t) = s(x - ct, c)$, $s(x,c) = \dfrac{3c}{\cosh^2 \frac{1}{3}\sqrt{c}x}$ függvények megoldásai tetszőleges $c > 0$ számra. Ezek a függvények egyenletes c sebességgel haladó hullámokat írnak le. Az igazán érdekes nem az, hogy ezek a függvények megoldások, hanem hogy e megoldások fontos szerepet játszanak az általános megoldás viselkedének leírásában. (A nem-linearitás miatt nem várhatjuk, hogy az általános megoldás felírható speciális megoldások lineáris kombinációjaként.) Az eredmény, melyet legalább részben meg kívánunk érteni, a következő:

Tétel: *Legyen $u(x,t)$ a $(*)$ egyenlet $\pm\infty$-ben eltünő megoldása. Léteznek olyan $c_1, \dots,$ c_N pozitív számok, (az u megoldás sajátsebességei) és olyan $\theta_i^\pm$ eltolások, melyekre*

$$\lim_{t\to\pm\infty} u(x+ct) = \begin{cases} s(x-\theta_i^\pm, c_i) & ha\ c = c_i, \\ 0 & ha\ c \neq c_i \end{cases}$$

A megoldás fontos lépése sok (a fizikai irodalomban integrálnak nevezett) megmaradó mennyiséget találni (például a c_i sajátsebességek ilyenek), azaz olyan $\mathcal{F}u$ funkcionálokat, ahol $u = u(x)$ $\pm\infty$-ben eltünő sima függvény, melyekre $\mathcal{F}u(x,t)$ nem függ t-től, ha $u(x,t)$ a $(*)$ egyenlet megoldása. Ha időnk engedi, érdemes megtárgyalni a következő kérdést is: Ha olyan megoldást tekintünk, melyek negatív időpontokban egy gyorsan és előtte pedig egy lassan haladó hullámból áll, akkor hogyan viselkedik a megoldás azután, hogy a gyors hullám eléri a lassú hullámot?

Ugyancsak érdemes beszélni arról, hogy melyek azok az $u_t = K(u)$ parciális differenciálegyenlettel leírható ,,integrálható rendszerek”, melyek megoldhatóak a sok megmaradó mennyiség miatt. (A mi esetünkben $K(u) = -uu_x - u_{xxx}$.) Megbeszéljük, részben feladatok formájában a következő fontos Lax Péter által megfogalmazott módszert. Minden sima $u = u(x)$ függvényhez rendeljünk hozzá egy $\mathbf{L}_u$ önadjungált operátort (mondjuk az $L_2(R, \mathcal{A}, \lambda)$ térben). Rögzítsünk egy $u = u_0$ függvényt, és legyen $\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_{u(x,t)}$, ahol $u(x,t)$ az $u_t = K(u)$, $u(x,0) = u_0$ egyenlet megoldása. Próbáljuk az $\mathbf{L}_u$ operátorokat úgy megadni, hogy az $\mathbf{L}(t)$, $t \geq 0$, operátorok unitér ekvivalensek, ami a következőt jelenti:

Definició. *Az $\mathbf{L}(t)$, $t \geq 0$, önadjungált operátorok unitér ekvivalensek, ha létezik $\mathbf{U}(t)$ unitér operátoroknak serege, melyekre az $\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{L}(t)\mathbf{U}(t)$ operátorok nem függnek a t paramétertől.*

(Ilyen esetben a $\mathbf{L}(t)$ operátor spektruma nem függ t-től.)

E módszer mögött a következő filozófia áll. A fizikában szereplő közönséges differenciálegyenletek vizsgálatában fontos szerepet játszanak a megmaradó mennyiségek, azaz integrálok, melyek konstansok egy trajektória mentén. Jelen esetben parciális differenciálegyenleteket tekintünk, melyekben végtelen sok megmaradó mennyiséget keresünk. Szeretnénk olyan végtelen dimenziós mátrixokat (operátorokat) találni, melyek konstansok egy trajektória mentén. Kénytelenek vagyunk azonban egy ennél gyengébb célt kitűzni. Úgy akarunk operátorokat a függvényekhez hozzárendelni, hogy a parciális differenciálegyenlet egy trajektóriája mentén egy operátor elforgatottjai jelenjenek meg. Ezt jelenti az unitér ekvivalencia bevezetése. Egy közönséges $\frac{dx}{dt} = F(x,t)$ differenciálegyenlet esetében egyszerűen megfogalmazható annak feltétele, hogy egy $G(x)$ függvény integrál legyen. Ehhez az kell, hogy teljesüljön a $\frac{dG(x(t))}{dt} = 0$ feltétel. A következő tétel ennek az állításnak a végtelen dimenziós, nem kommutativ megfelelője.

Tétel. *Legyen adva (a $\pm\infty$-ben eltünő sima u függvényektől folytonosan függő) $\mathbf{L}_u$ önadjungált és $\mathbf{B}_u$ antiszimmetrikus operátorok (azaz $\mathbf{B}^* = -\mathbf{B}$) egy rendszere, továbbá az u függvényeknek egy a t paramétertől folytonosan függő $u = u(t)$ családja, (pl. egy $u_t = K(u)$ egyenlet megoldásai). Legyen $\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_{u(t)}$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_{u(t)}$. Ha $\mathbf{L}_t = [\mathbf{B}(t), \mathbf{L}(t)]$, ahol $\mathbf{L}_t = \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt}$, $[\mathbf{B}, \mathbf{L}] = \mathbf{BL} - \mathbf{LB}$, akkor az $\mathbf{L}(t)$ operátorok unitér ekvivalensek.*

Megfogalmazunk néhány feladatot, melyek megtárgyalása segíthet ennek az állításnak a megértésében.

1.) Legyen $\mathbf{U}(t)$ unitér $n \times n$-es mátrixok a t változó szerint differenciálható rendszere. Ekkor $\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{BU}$, ahol $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ antiszimmetrikus mátrix, azaz $\mathbf{B}^* = -\mathbf{B}$. Megfordítva, ha adva van antiszimmetrikus mátrixoknak egy differenciálható $\mathbf{B}(t)$ serege, $t \geq 0$, akkor az $\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása unitér mátrixoknak egy $\mathbf{U}(t)$ serege.

   Segítség: Tekintsük a következő közelítő megoldásokat:$\mathbf{U}(t) = e^{(t-\frac{j}{n})\mathbf{B}(\frac{j}{n})}\mathbf{U}\left(\frac{j}{n}\right)$, ha $\frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}$.

2.) (Ismétlés) Az $i\frac{d}{dx}$ operátor önadjungált (pontosabban kiterjeszthető önadjungálttá) az $L_2(R^1, \mathcal{B}, \lambda)$ téren, ahol λ a Lebesgue mérték a számegyenesen.

3.) Ha $\mathbf{A}(t)$ invertálható mátrixok a t paraméter szerint differenciálható serege, akkor $\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$.

4.) Bizonyítsuk be a tételt az 1. feladat végtelen dimenziós változata segítségével.

   Segítség: Lássuk be, hogy $\frac{d\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{L}(t)\mathbf{U}(t)}{dt} = 0$, ha az $\mathbf{U}(t)$ unitér operátorokat a $\mathbf{U}_t = \mathbf{BU}$, $(\mathbf{U}(0) = \mathbf{I})$ egyenlet határozza meg.

5.) Az $\mathbf{L}_u = D^2 + \frac{1}{6}u$ operátor önadjungált, a $\mathbf{B}_0 = D$ és $\mathbf{B}_1 = D^3 + bD + Db$

operátorok pedig antiszimmetrikusak az $L^2(R, \mathcal{B}, \lambda)$ térben, ahol $D = \dfrac{d}{dx}$, az f függvény szorzóoperátor az f függvénnyel. $[\mathbf{B}_0, \mathbf{L}] = \dfrac{1}{6}u_x$,

$$[\mathbf{B}_1, \mathbf{L}] = \frac{1}{2}u_x D^2 + \frac{1}{2}u_{xx}D + \frac{1}{6}u_{xxx} - 4b_x D^2 - 4b_{xx}D - b_{xxx} + \frac{1}{3}bu_x \,.$$

6.) A $[\mathbf{B}_0, \mathbf{L}] = \frac{1}{6}u_x$ állításból következik, hogy az $u_x = u_t$ egyenlet $u(x) = u(t, x)$ megoldásaira az $\mathbf{L} = D^2 + \dfrac{1}{6}u$ operátorok unitér ekvivalensek. Miért nyílvánvaló ez az állítás a fenti számolások nélkül is? A $b = \dfrac{1}{8}u$ választással a $\mathbf{B}_1$ operátor definiciójában és $\mathbf{B} = 24\mathbf{B}_1$ definicióval mutassuk meg, hogy a fenti $\mathbf{L}$ operátorok unitér ekvivalensek, ha a bennük szereplő $u = u(t, x)$ függvények a $(*)$ egyenlet megoldásai.

7.) Az $\mathcal{F}u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x)\, dx$ a $(*)$ egyenlet megmaradó mennyisége, azaz $\mathcal{F}u(x, t)$ nem függ t-től, ha $u(x, t)$ a $(*)$ egyenlet megoldása.

Segítség: Mutassuk meg, hogy $\dfrac{d}{dt}\mathcal{F}u(t, x) = \int 2u(x, t)u_t(x, t)\, dx = 0$ parciális integrálás segítségével.

Érdemes bevezetni a véges dimenziós terekben definiált érintővektor természetes megfelelőjét a sima és a $\pm\infty$-ben eltünő függvények terében. Legyen $u = u(x)$ egy ilyen függvény és az $u(x, \varepsilon)$, $u(x, 0) = u$ függvénysereghez, rendeljük hozzá a $v = \left.\dfrac{du(x, \varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ érintőt, feltéve, hogy az létezik. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik az érintővektor, ha az u függvény változását egy parciális differenciálegyenlet irányítja. Részletesebben leírva, tekintsünk egy $u_t = K(u)$ parciális differenciálegyenletet, ahol $K(u)$ egy „szép" funkcionál, legyen $u_0 = u_0(x, \varepsilon)$ egy a 0 időpontban kiinduló függvénysereg v érintővektorral. Legyen $u(t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon)$ az $u_t = K(u)$ egyenlet megoldása $u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x, \varepsilon)$ kezdeti feltétellel, és határozzuk meg az ehhez a függvénysereghez tartozó $v(t) = \left.\dfrac{du(x, t, \varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ érintővektorokat.

8.) Legyen az $u_t = K(u)$ differenciálegyenlet olyan, melyre a $K(u)$ kifejezés differenciálható, azaz létezik olyan $V = V(u)$ funkcionál a sima függvények terén, melyre igaz minden sima $\pm\infty$-ben eltünő v függvényre, hogy $\left.\dfrac{dK(u + \varepsilon v)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = V(u)v$. Ekkor a fent definiált $v(t)$ érintővektorok léteznek, és teljesítik a $v_t = V(u(t))v$ parciális differenciálegyenletet. Ha $K(u) = -uu_x - u_{xxx}$, (a Korteweg-deVries egyenlet), akkor $V(u) = -uD - u_x - D^3 = -Du - D^3$, ahol D a differenciáloperátort, f pedig az f függvénnyel való szorzás operátorát jelöli.

Legyen $I(u)$ az $u_t = K(u)$ parciális differenciálegyenlet egy integrálja, (azaz a differenciálegyenlet egy $u = u(t)$ megoldására $I(u(t))$ =const.). Azt mondjuk, hogy az $I(u)$ funkcionálnak létezik egy $G(u)$ gradiense, ha minden sima $\pm\infty$-ben eltünő u és v függvényekre $\left.\dfrac{dI(u + \varepsilon v)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (G(u), v) = \int G(u)(x)v(x)dx$.

9.) Teljesítse az $u_t = K(u)$ egyenlet az elözö feladat feltételeit, legyen $u(t)$ ennek az egyenletnek megoldása, $v = v(t)$ pedig az $u(t)$ pontokból kiinduló érintősereg. (Ez ekvivalens azzal, hogy $v(t)$ a $v_t = V(u(t))v$ egyenlet megoldása.) Ekkor a $(G(u(t)), v(t))$ kifejezés nem függ t-től.

Megbeszéljük a Lax cikk néhány fontos részeredményét. Legyen az $u_t = K(u)$ differenciálegyenlet eltolásinvariáns, és legyen $u(t,x) = s(x-ct)$ ennek egy eltolásinvariáns (hullám) megoldása. Ha $I(u)$ a differenciálegyenlet egy integrálja, $G(u)$ gradienssel, akkor a $G(u)$ gradiens függ mint az u függvénytől, mint az $I(u)$ funkcionáltól. Viszont alkalmas feltételek teljesülése esetén, melyet például a Korteweg-deVries egyenlet teljesít $G(s) = \kappa s$, (s egy hullám megoldás) minden valamilyen G gradienssel rendelkező I integrálra.

Legyen a differenciálegyenlet olyan, melyre az $\mathbf{L}_u = D^2 + \frac{1}{6}u$ operátor $I(u) = \lambda(u)$ sajátvektora integrál. Ennek meghatározható a gradiense, és ez $\frac{1}{6}w^2$, ahol w, $\int w^2\,dx = 1$, az $\mathbf{L}_u = \lambda(D^2 w + \frac{1}{6}uw)$ egyenlet megoldása, azaz a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ez az összefüggés az alapja annak az eredménynek, mely a Korteweg-deVries egyenlet megoldásában megjelenő hullámok sebességét kifejezi a hozzátartozó $\mathbf{L}_u$ operátor sajátértékeinek segítségével.

A duplahullámok vizsgálatához hasznos a KdV egyenlet olyan új integráljait találni, melyek $I(u) = \int P(u)\,du$ alakúak, ahol $P(u)$ az u, u_x, ... , $u_{x\dots x}$ függvények polinomja. Sikerült olyan I_1, I_2, I_3 integrálokat találni, melyek magfüggvényei a következő alakúak: $P_1(u) = \frac{1}{2}u^2$, $P_2(u) = \frac{1}{3}u^3 - u_x^2$, $P_3(u) = \frac{1}{3}u^4 - 3uu_x^2 + \frac{9}{5}u_{xx}^2$. Ahhoz, hogy be tudjuk látni, hogy ezek a kifejezések valóban integrálok, oldjuk meg a következő feladatot:

10.) Az alábbi tipusú függvények esetén a $G(u)$ gradiens az u függvény és azok deriváltjainak (kiszámítható) polinomja, azaz az $\left.\dfrac{d}{d\varepsilon}\int P(u+\varepsilon v)\,dx\right|_{\varepsilon=0} = \int G(u)v\,dx$ egy ilyen függvénnyel. Az ilyen gradienseket lokális függvényeknek hívják. (Miért?) A fenti tipusú $I(u)$ funkcionál integrál, ha a hozzátartozó $G(u)$ gradiensre $G(u)K(u)$ teljes differenciál (az $u_t = K(u)$ egyenlet integráljait keressük), azaz $G(u)K(u) = [H(u)]_x$ alakú alkalmas $H(u)$ függvénnyel.

Segítség: $\dfrac{d}{dt}\int P(u)\,dx = (G(u), K(u))$.

Tekintsük a fent definiált I_1, I_2, I_3 integrálok valamilyen $\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3$ lineáris kombinációját, illetve a hozzá tartozó $G = G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \alpha_3 G_3$ gradienst. Lássuk be, hogy

11.) Ha u_0 olyan függvény, melyre $G(u) \equiv 0$, akkor a KdV egyenlet $u(t)$ megoldásai $u(0) = u_0$ kezdeti feltétellel szintén teljesítik az $G(u(t)) \equiv 0$ azonosságot.

Ez az észrevétel segít kétpupú hullámmegoldások megtalálásában. Válasszuk a G gradienst úgy, hogy két előírt c_1 és c_2 sebességű s_1 és s_2 hullámra $G(s_1) = G(s_2) = 0$. (Emlékeztetőül: $G(s) = \kappa s$ tetszőleges G gradiensre, ha s hullám megoldás.)