Feladatok a lánctörtekről:

1. Legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ valós számok. Ekkor létezik vegtelen sok olyan q egész szám, melyekre $\left|\alpha_s - \frac{p_s}{q}\right| \le \frac{\text{const.}}{q^{(k+1)/k}}$ alkalmas p_s egésszel minden $s = 1, \dots, k$ számra.

2. Tekintsük az $[a_1, a_2, \dots] = \lim\limits_{n\to\infty} [a_1, \dots, a_n]$ lánctörtet, ahol $a_1, a_2, \dots$ pozitív valós (nem feltétlenül egész) számok, feltéve, hogy a fenti limesz létezik. Lássuk be, hogy a fenti limesz akkor és csak akkor létezik, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

   Megjegyzés: Láttuk, hogy a konvergencia szükséges és elégséges feltétele az, hogy ha $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ az n-ik közelítő tört "nevezője", akkor $\lim q_n q_{n+1} \to \infty$. Továbbá, a q_{2k}, illetve q_{2k+1}, $k = 1, 2, \dots$, sorozatok monoton nővekvőek.

3. Legyenek (a, b) és (c, d) egész koordinátájú vektorok a síkban. E két vektor által kifeszített parallelogramma akkor és csak akkor nem tartalmaz a belsejében rácspontot, ha $|ad - bc| = 1$. Hogy szól ennek a feladatnak a több-dimenziós változata?

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan α szám és annak $\frac{p_n}{q_n}$ közelítő lánctörtje, melyre $\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| > \frac{(1-\varepsilon)}{q_n^2}$.

5. Mutassuk meg, hogy a racionális számokkal legrosszabbul approximálható számra azaz az $\alpha = [1, 1, \dots]$ számra $[1, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Továbbá, $\limsup\limits_{n\to\infty} q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5a. Az 5. feladat megoldása érdekében mutassuk meg, hogy az ötödik feladatban szereplő $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ szám n-ik lánctörtje $\frac{B_{n-1}}{B_n}$ alakban írható, ahol $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_{k+2} = B_{k+1} + B_k$, ≥ 0. Adjunk explicit formulát a B_n sorozat elemeinek értékére.

6. Mutassuk meg, hogy egy lánctört, mely egy idő múlva egy $(b_1, \dots, b_s)$ periódust ismétel egy egész együtthatós másodfokú egyenlet megoldása. (Az állítás megfordítása az előadáson fog szerepelni.)

7. Legyen α irracionális szám, és legyen az α számnak $\frac{p_n}{q_n}$ az n-ik közelítő lánctörtje. Mérjük fel az egységkörre a $k\alpha$, $0 \le k < q_n + q_{n+1}$, szögeket. Mutassuk meg, hogy ezek a pontok q_n darab $2\pi|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$ és q_{n-1} darab $2\pi|q_n\alpha - p_n|$ hosszúságú ívre osztják az egységkört.

8. Lássuk be, hogy a $\mu(A) = \frac{1}{\log 2}\int_A \frac{dx}{1+x}$ (úgynevezett Gauss) mérték invariáns mérték a $Tx = \left\{\frac{1}{x}\right\}$ transzformációra, ahol $\{u\}$ az u szám tört részét jelenti, azaz $\{u\} = u - [u]$, és $[u]$ a legnagyobb az u számnál kisebb egész szám. Az, hogy a μ mérték invariáns a T transzformácóra azt jelenti, hogy $\mu([0, a]) = \mu\{x\colon Tx \in [0, a]\}$ minden $0 < a < 1$ számra.