MATROIDELMÉLETI FELADATOK

1. Keressünk olyan matroidot, amelyik semmilyen vektortér felett sem reprezentálható.
2. Legyenek B_1 és B_2 egy M matroid bázisai.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olysn f bijekció B_1 és B_2 között, amelyikre $B_1 - x + f(x)$ minden $x \in B_1$ esetén bázis M-ben.
   (b) Bizonyítsuk be az erős bázisaxiómát:
   Legyen $x \in B_1 - B_2$. Ekkor létezik olyan $y \in B_2 - B_1$, hogy $B_1 - x + y$ és $B_2 - y + x$ is bázisok M-ben.
3. Legyenek $C_1, \ldots, C_m$ egy M matroid körei, melyekre
$$C_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} C_j.$$
   és $D \subseteq S$, $|D| < m$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan C kör M-ben, melyre
$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} C_i - D.$$
4. Legyen M egy matroid S-n az r rangfüggvénnyel és f egy szürjekció S-ről T-re. Bizonyítsuk be, hogy a T-n kapott matroid (az S-beli függetlenbe párosítható halmazok függetlenek) rangfüggvénye teljesíti az
$$r_f(A) = \min_{Y \subseteq A} (r(f^{-1}(Y)) + |A - Y|) \qquad (A \subseteq T)$$
   azonosságot.
5. Legyenek M_1 és M_2 matroidok S-n az r_1 ill. r_2 rangfüggvénnyel. Ekkor az uniómatroid rangfüggvénye teljesíti az
$$r(X) = \max_{Y \subseteq X} (r_1(Y) + r_2(X - Y)) \qquad (X \subseteq S)$$
   azonosságot.
6. Egy G gráf körmatroidja akkor és csak akkor irreducibilis (nem áll elő nem triviális módon két matroid uniójaként), ha minden e élre $G - e$ 2-összefüggő.