Végesen additiv invariáns mértékek csoportokon

1.) A természetes számok halmazán létezik nem triviális végesen additív 0–1 mérték, azaz a természetes számok összes részhalmazához 0 vagy 1 számot lehet hozzárendelni úgy, hogy a teljes halmazhoz az 1 számot az egy elemű halmazokhoz a 0 számot rendeljük, és a halmazfüggvény végesen additív.

A ,,klasszikus példa" olyan $\mathbf{G}$ csoportra, melyben nem létezik a csoport összes részhalmazán definiált egyre normált végesen addítiv (jobboldali) mozgatásra invariáns mérték, illetve ami ezzel ekvivalens, a $\mathbf{G}$ csoporton értelmezett korlátos függvények terén definiált (baloldali) transzláció invariáns középérték, (lásd *Invariáns mértékek és az 1997. évi Schweitzer verseny 7. feladata* feladatsort, ahol ezeket a fogalmakat tárgyaltuk) a két elem által generált szabad csoport, illetve az ezt részcsoportként tartalmazó csoportok. Az alábbiakban belátjuk e csoportoknak a fent említett tulajdonságát.

Egy a és b elem által generált szabad csoport az a, a^{-1}, b és b^{-1} jelekből álló véges sorozatok (szavak), két szó szorzata a két szó egymás után írása. Egy szó megegyezik annak rövidítésével, melyet úgy kapunk, hogy egy esetlegesen részként tartalmazott aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1} vagy $b^{-1}b$ sorozatot elhagyunk. Egy tovább nem egyszerűsíthető szót irreducibilisnek nevezünk. Egy szó irreducibilis alakja egyértelmű. Miért?

2.) Lássuk be, hogy az a és b elem által generált $\mathbf{G}$ szabad csoporton értelmezett korlátos függvények terén nincsen (baloldali) transzláció invariáns középérték. Lássuk be, hogy ennek az állításnak a bizonyításához elég megadni olyan korlátos f függvényt a $\mathbf{G}$ csoporton és $\alpha \in \mathbf{G}$, $\beta \in \mathbf{G}$, $\gamma \in \mathbf{G}$ szavakat, melyekre

$$\sup_{x \in \mathbf{G}} [f(\alpha x) + f(\beta x) - f(\gamma x) - f(x)] < 0.$$

Lássuk be, hogy ez a tulajdonság teljesül a következő választással. Legyen $f(x) = 1$, ha $x = a^{\varepsilon} y$, $f(x) = 0$, ha $x = b^{\varepsilon} y$ alakú, $\varepsilon = \pm 1$, ahol az x szót annak irreducibilis alakjában írjuk fel. Legyen továbbá $\gamma = a$, $\alpha = ba^{-1}$, $\beta = b^{-1}a^{-1}$.

3.) Ha a $\mathbf{G}$ csoporton értelmezett korlátos függvények terén létezik M (jobboldali) transzláció invariáns középérték, és a $\mathbf{H}$ csoport a $\mathbf{G}$ csoport részcsoportja, akkor létezik M_0 (baloldali) transzláció invariáns középérték a $\mathbf{H}$ csoporton értelmezett korlátos függvények terén is. Részletesebben, mutassuk meg, hogy a következő konstrukció példát ad ilyen M_0 mértékre. Válasszunk minden $\mathbf{H}x$ jobboldali mellékosztályban egy $x' = x'(\mathbf{H}x) \in \mathbf{G}$ elemet, és minden $z \in \mathbf{H}x$-re definiáljuk a $\gamma(z) \in \mathbf{H}$ egyértelműen meghatározott elemet, melyre $z = \gamma(z)x'(\mathbf{H}x)$. Egy $f(\cdot)$ $\mathbf{H}$-n értelmezett korlátos függvényhez rendeljük hozzá az $f'(z) = f(\gamma(z))$ korlátos függvényt $\mathbf{G}$-n, és legyen $M_0 f = Mf'$.

Ha a két elem által generált szabad csoport a $\mathbf{G}$ csoport részcsoportja, akkor a $\mathbf{G}$ csoporton nem létezik baloldali (jobboldali) transzláció invariáns középérték.
Segítség: Mutassuk meg, hogy $h \in \mathbf{H}$ és $z \in \mathbf{G}$-re $h\gamma(z) = \gamma(hz)$, ha $h \in \mathbf{H}$, f korlátos függvény $\mathbf{H}$-n, $f_1(z) = f(hz)$ akkor $f_1'(z) = f'(hz)$.

4.) Ha a **G** csoporton definiált korlátos függvények terén van baloldali eltolás invariáns középérték, akkor létezik jobboldali, sőt egyszerre bal és jobboldali eltolás invariáns középérték is.

Segítség: Ha M_l baloldali eltolás invariáns középérték, akkor $M_r f(x) = M_l f(x^{-1})$ jobboldali eltolásinvariáns középérték. Definiáljuk az $f'(x) = M_r f(x\cdot)$ függvényt, és az $M_0 f = M_l f'$ leképezést. Mutassuk meg, hogy M_0 mind bal mind jobboldali eltolás invariáns mérték. Ehhez lássuk be, hogy $f_1(x) = f(ax)$ és $f_2(x) = f_2(xb)$, $a, b \in \mathbf{G}$-re $f_1'(x) = f'(ax)$ és $f_2'(x) = f'(x)$.