Nagy eltérések elmélete

1.) Legyen $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók sorozata, $P(\xi_j=1-p)=1-P(\xi_j=-p)=p$, $0<p<1$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$. Válasszunk $p=1/3$ számot, és legyen n osztható 3-mal. Akkor $P(S_n=0)=\dfrac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$. Ha $P(\xi_j=1-p)=1-P(\xi_j=-p)=\dfrac12$, akkor $P(S_n=0)=\dfrac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{n(H(p)-\log 2)}$, ahol $H(p)=-(p\log p+(1-p)\log(1-p))$. Azon n hosszúságú 0, 1 sorozatok száma, melyek pontosan $\dfrac n3$ egyest tartalmaznak $\dfrac{3+o(1)}{2\sqrt{\pi n}}e^{nH(1/3)}$.

2.) Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók, melyekre $Ee^{t\xi_j}\le R(t)$ valamilyen $t>0$-ra. Legyen $S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$. Ekkor

$$P(S_n>nx)\le e^{n(\log R(t)-tx)}\,.$$

A következő kérdéssel foglalkozunk: Legyenek ξ_k, $k=1,2,\dots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$. Tegyük fel, hogy ezek a valószínűségi változók minden nem túl megszorító, jó tulajdonsággal rendelkeznek. A $P(S_n-ES_n>nx)$ valószínűségek aszimptotikus viselkedésének minél pontosabb leírását szeretnénk megadni, ha $n\to\infty$. Az első feladatban bizonyos speciális esetben a $P(S_n=nx)$ valószínűség pontos aszimptotikáját adtuk meg. Kérdések: Tudunk-e az első feladat állítására olyan bizonyítást adni, mely általánosabb, tehát nemcsak ebben a speciális esetben működik? Éles-e a második feladat állítása? Ebben szerepel egy t paraméter. Természetesen ezt a t paramétert igyekezünk optimális módon választani. Ilyen választás esetén éles becslést kapunk-e, vagy ez a becslés lényegesen javítható?

E kérdés megértése céljából tekintsük a következő problémát. Legyenek ξ_n, $n=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_1=j)=p(j)$, $j=0,\pm1,\pm2,\dots$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}p(j)=1$, azaz a ξ_n valószínűségi változók csak egész értékeket vesznek fel. Legyen $S_n=\sum\limits_{k=1}^n\xi_k$, és vizsgáljuk a $p^{(n)}(m)=P(S_n=m)$ valószínűségek viselkedését. E kérdés az első feladat természetes általánosítása. Ezt vizsgálhatjuk a $p^{(n)}(m)$ valószínűségek kiszámításával a Fourier analizis segítségével. Kérdés: Tudunk-e ilyen módon jó aszimptotikát adni a $p^{(n)}(m)$ valószínűségekre? Ez elegendő-e a $p^{(n)}([n\alpha])$ valószínűségek jó aszimptotikájának vizsgálatához, ahol $[x]$ az x szám egész része? Ez a kérdés egyszerűbb, mint a $P(S_n>nx)$ valószínűség vizsgálata. Viszont az eredeti kérdés megoldásához szükséges összes lényeges gondolat már e kérdés vizsgálatában is megjelenik.

A következő három feladatban jó aszimptotikát adunk a $p^{(n)}(m)$ valószínűségekre. Viszont a nagy eltérés tipusú problémák vizsgálatához új gondolat is szükséges. A nagy eltérés problémák egyik lehetséges és természetes megoldása a nyeregpont módszer megértése és alkalmazása.

Definiáljuk a

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k)e^{ikt}$$

Fourier sort. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

3.)

$$\varphi^n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^{(n)}(k)e^{ikt} \quad \text{ahol } p^{(n)}(k) = P(\xi_1 + \cdots + \xi_n = k)$$

minden $n = 1, 2, \ldots$ számra. Ezért

$$p^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi^n(t)\, dt\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

4.) $|\varphi(t)| \leq 1$. Továbbá $|\varphi(t)| < 1$ minden $t \neq 0$ és $|t| \leq \pi$ esetén akkor és csak akkor, ha a $\mathcal{K} = \{k\colon p(k) > 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ halmaz nincs egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján, azaz minden $d \geq 2$ és r számra az $\mathcal{L}(d, r) = \{jd + r;\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ halmaz (a d rácsszélességű r számmal eltolt rács) nem tartalmazza a $\mathcal{K}$ halmazt.

$E\xi_1^l = i^l \varphi^{(l)}(0)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, ahol ξ_1 olyan valószínűségi változó, melyre $P(\xi_1 = k) = p(k)$, $i = \sqrt{-1}$, és $\varphi^{(l)}(0)$ a $\varphi(t)$ függvény l-ik deriváltja a nullában.

5.) Ha a $\mathcal{K} = \{k\colon p(k) > 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ halmaz nincs egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján, akkor rögzített k egész számra és tetszőleges olyan $\varepsilon(n)$ sorozatra, melyre $\varepsilon(n) \to 0$, ha $n \to \infty$, rögzített n-re alkalmazva a $k = nE\xi_1 + m\sqrt{n\mathrm{Var}\,\xi_1}$ természetes skálázást felírhatjuk, hogy

$$P\left(S_n = k\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon(n)}^{\varepsilon(n)} \exp\left\{-i\left(nE\xi_1 + m\sqrt{n\mathrm{Var}\,\xi_1}\right)t\right\}\varphi^n(t)\, dt + O\left(e^{-\mathrm{const.}\, n\varepsilon(n)^2}\right)\,,$$

és

$$\varphi^n(t) = \exp\left\{n\left(iE\xi_1 t - \mathrm{Var}\,\xi_1 \frac{t^2}{2}\right)\right\}\left(1 + O(nt^3)\right), \quad \text{ha } |t| < n^{-1/6}\,.$$

Lássuk be ennek az összefüggésnek a segítségével, hogy az előző feltételek teljesülése esetén

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\mathrm{Var}\,\xi_1}} e^{-(k-nE\xi_1)^2/2n\mathrm{Var}\,\xi_1} + O\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Hogyan módosul ez az állítás akkor, ha a $\mathcal{K}$ halmaz egy $d > 1$ rácsszélességű rács eltoltja tartalmazza?

Az utolsó feladat eredménye jó aszimptotikát ad a $p^{(n)}(k)$ valószínűség értékére, ha $k - nE\xi_1 \sim \sqrt{n}\mathrm{Var}\,\xi_1$. Miért nem működik ez a módszer jól a többi esetben? Értsük meg, hogy az általános esetben a nyeregpont módszer segítségével a következő eredményt kapjuk (feltételezve, hogy a ξ_1 valószínűségi változó eloszlása teljesít bizonyos feltételeket.)

6.) Tegyük fel, hogy $E\xi_1 = 0$, és ξ_1 eloszlásának tartója, a $\mathcal{K} = \{k\colon p(k) > 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ halmaz nincs egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján. Ekkor

$$p^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik(t+is)}\varphi^n(t+is)\,dt\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

tetszőleges s valós számra, ahol $\varphi(t+is)$ a $\varphi(t)$ Fourier sor által definiált függvény analitikus kiterjesztése a komplex számsíkra. Legyen az s szám a $n\psi'(is) = ik$, egyenlet valós megoldása, ahol $\psi(t+is) = \log\varphi(t+is)$. Értsük meg az

$$e^{-ik(t+is)}\varphi^n(t+is)$$

függvény viselkedését ennek az is pontnak a környezetében. Ennek érdekében lássuk be, hogy $\bar\psi(s) = \psi(-is)$ valós értékű függvény, melynek második deriváltja szigorúan pozitív, és $\bar\psi(s) = 0$. Ezért az előző egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Ha ez az egyenlet megoldható, és a $\psi(\cdot)$ függvény analitikus a megoldás kis környezetében, akkor

$$p^{(n)}(k) = \frac{\exp\left\{n\left(\bar\psi(-s) - \frac{k}{n}(-s)\right)\right\}}{\sqrt{2\pi n\bar\psi''(-s)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\,.$$

Ha $k > cn$ alkalmas $c > 0$ számmal, akkor mivel $\bar\psi(0) = \psi'(0) = 0$, és $\bar\psi(s)$ szigorúan konvex, $\psi(s) + \dfrac{k}{n} < -c'$, alkalmas $c' > 0$-val. Lássuk be, hogy a 1. feladat eredménye e feladat állításainak speciális esete. $\bar\psi(-s) = \log R(s) = \log Ee^{s\xi_1}$. Hasonlítsuk össze az ebben a feladatban adott aszimptotikát a 2. feladat becslésével.