Feladatok:

Az alábbi feladat tárgyalását a szemináriumon a Pálffy Péter Pál előadásának a vége sugallta.

Határozzuk meg az $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}f(x) = x^2 f(x) - \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x)$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

Megjegyzés: Az $\mathcal{A}$ operátor az un. quantum rotátort leíró operátor. Valóban, egy (klasszikus) rotátor (harmonikus oszcillátor) Hamilton függvénye $\mathcal{H} = x^2 + v^2$, ha a paramétereket alkalmasan választjuk. Kvantáláskor az x^2-nek az x^2 szorzóoperátor, v-nek az $i\frac{d}{dx}$ (a Planck állandót egynek választottuk), így v^2-nek a $-\frac{d^2}{dx^2}$ operátor felel meg. Ezért a $\mathcal{H}$ kvantáltja a $\mathcal{A}$ operátor.

Vázolok egy lehetséges megoldást.

Lássuk be, hogy az $\mathcal{A}$ operátor önadjungált operátor a négyzetesen integrálható függvények terében, amelynek sajátaltereit alkotják minden k-ra a következő függvények: $g(x) = P_k(x)e^{-x^2/2}$, ahol $P_k(x)$ legfeljebb k-fokú polinom. Oldjuk meg a feladatot ennek az észrevételnek az alapján. A sajátfüggvényben szereplő polinom legmagasabb fokú tagjának az együtthatóját vizsgálva lássuk be, hogy amennyiben e polinom fokszáma k, akkor a sajátérték $2k$.

Feladat Fourier transzformált aszimptotikus viselkedésének meghatározására a végtelen környezetében a nyeregpont módszer segítségével.

Határozzuk meg az $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^4}\,dx$ Fourier transzformált aszimptotikus viselkedését, ha $t \to \infty$. Mutassuk meg, hogy ez $t \to \infty$-re aszimptotikusan

$$Ct^{-1/3} \exp\left\{-\frac{3}{8\sqrt[3]{4}}t^{4/3}\right\} ,$$

alkalmas $C > 0$-val. Számítsuk ki a $C > 0$ konstanst.

Ennek a feladatnak a megoldása a nyeregpont módszer egy nem triviális alkalmazásán alapul. Beszéltünk a szemináriumon arról, hogy analitikus függvény Fourier transzformáltja a végtelenben exponenciális gyorsan tart nullához. A feladat az, hogy ennek az állításnak a bizonyítását finomítva egy konkrét esetben pontos aszimptotikát adjunk. További kérdés: Milyen a $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^{2k}}\,dx$ Fourier transzformált aszimptotikus viselkedése tetszőleges pozitív egész k számra? (E feladat megoldásának részleteit nem dolgozzuk ki, de ha valaki a résztvevők közül ezt mégis megteszi, azt szívesen meghallgatjuk.)

Megoldásvázlat: Érdemes a feladatot átírni homogénabb formában az $x = t^{1/3}\bar{x}$ helyettesítéssel. Azt kapjuk, hogy $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^4}\,dx = t^{1/3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t^{4/3}(i\bar{x}-\bar{x}^4)}\,d\bar{x}$, ezért foglalkozhatunk az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t^{4/3}(ix-x^4)}\,dx$ integrál aszimptotikájának a vizsgálatával. A nyeregpontok, az exponensben levő $h(x) = ix - x^4$ függvény $i - 4x^3$ deriváltjának a nullhelyei, azaz a $z_j = -i\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\varepsilon_j$, $j = 1, 2, 3$ számok, ahol $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mi a nyeregpont szemléletes tartalma, és miért ezek az érdekes pontok? A $h(z)$ pont értéke a nyeregpontokban, $h(z_j) = z_j(i - z_j^3) = \frac{3}{4}iz_j = \frac{3}{4^{4/3}}\varepsilon_j$, $j = 1, 2, 3$. Olyan görbét keresünk, amely a $-\infty$ pontból a ∞ pontba megy, áthaladva a z_2 és z_3 nyeregpontokon, a nyeregpontokban a görbe iránya olyan, mint amilyet a nyeregpont módszer sugall, és az $e^{t^{4/3}h(x)}$ függvényt ezen a görben integrálva, az integrál értékének fő hozadékát a z_2 és z_3 nyeregpontok kis környezetei adják. A fő kérdés: Hogyan valósítható ez meg?

A $h(z)$ függvény Taylor sor fejtése a z_j nyeregpontokban a $h(z) = h(z_j) - 6z_j^2(z - z_j)^2 - 4z_j(z - z_j)^3 - (z - z_j)^4$ függvény. A keresett integrálási út z_j nyeregpontokon átmenő részét $u_j(s) = z_j + \frac{|z_j|}{z_j}s$ alakban érdemes választani. Ekkor $h(u_j(s)) = h(z_j) - 6|z_j|^2s^2 - 4\frac{|z_j|^3}{z_j^2}s^3 - \frac{|z_j|^4}{z_j^4}s^4 = h(z_j) - 6(\frac{1}{4})^{2/3}s^2 + 4^{2/3}\varepsilon_j s^3 + \bar{\varepsilon}_j s^4$, ahonnan $\Re h(u_j(s)) = \Re h(z_j) - 6(\frac{1}{4})^{2/3}s^2 - 2(\frac{1}{4})^{1/3}s^3 - \frac{1}{2}s^4$. Innen következik, hogy a $\Re h(u_j(s))$ függvény maximuma az $s = 0$ pontban van, (ahol $u_j(s) = z_j$), mivel annak deriváltja, a $\Re h(u_j(s))' = 2s[-6(\frac{1}{4})^{1/3} - 3(\frac{1}{4})^{2/3}s - 2s^2]$ függvény $s \le 0$ esetén pozitív és $s \ge 0$ esetén negatív.

A fenti számolás a következő integrálási utat sugallja a $\varphi(t)$ integrál kiszámítására. Először menjünk a $-\infty$-ből az abszcissza tengelyen a $-\sqrt{3}4^{-1/3}$ pontba, onnan az $u_3(\cdot)$ egyenesen az $4^{-1/3}i$ pontba, onnan az $u_2(\cdot)$ egyenesen a $\sqrt{3}4^{-1/3}$ pontba, onnan az abszcissza tengelyen a $+\infty$-be. A kapott integrál lényeges hozadékat a z_2 és z_3 pontok kis környezete adja nagy t paraméterre. Ez olyan Gauss típusú integrál, amely jól számolható. A végeredmény:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= t^{1/3}\Re\left[2e^{t^{4/3}h(z_2)}\frac{\bar{z}_2}{|z^2|}\right]\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{4/3}\cdot 6|z_2|^2s^2}\,ds(1 + o(1))\\ &= \frac{t^{1/3}}{t^{2/3}\sqrt{6}|z_2|}\Re\left[\frac{z_2}{|z_2|}e^{-3\cdot 4^{-4/3}\varepsilon_2 t^{4/3}}\right](1 + o(1)) = C(t)t^{-1/3}e^{-3/8\sqrt[3]{4}\cdot t^{4/3}}(1 + o(1)),\end{aligned}$$

ahol

$$C(t) = \frac{4\cdot 2^{1/3}\sqrt{6\pi}}{6}\cos\left[\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt[3]{4}}t^{4/3} + \frac{\pi}{6}\right].$$

Valójában a fenti formulában $o(1)$ helyett $O(t^{-2/3})$-ot is írhatunk.