Poisson folyamatok, exponenciális eloszlások

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó Poisson eloszlású λ, $0<\lambda<\infty$, paraméterrel, ha ξ nem negatív egész értékeket vesz fel, és $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots$.

1.) Legyen ξ és η két független Poisson eloszlású valószínűségi változó, ξ λ és η μ paraméterrel. Akkor $\xi+\eta$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda+\mu$ paraméterrel.

A következő feladat célja az, hogy egyszerű módon konstruáljunk Poisson folyamatokat.

2.)

a) Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j\ge 0$ valószínűséggel esik, $j=1,\dots,k$, $\sum\limits_{j=1}^{k}p_j=1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Bizonyítsuk be, hogy az η_j, $j=1,\dots,k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j=1,\dots,k$.

b.) Legyen adva egy $(X,\mathcal{A})$ mérhető tér, és azon egy μ valószínűségi mérték. Legyen ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel, Válasszunk egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül $x_1,\dots,x_\xi$ pontokat az X téren úgy, hogy $P(x_j\in\mathbf{A})=\mu(\mathbf{A})$ minden $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$ és $j=1,\dots,\xi$-re. Lássuk be, hogy tetszőleges diszjunkt $\mathbf{A}_1\in\mathcal{A},\dots,\mathbf{A}_k\in\mathcal{A}$ halmazokra az e halmazokba eső kiválasztott x_l pontok száma egymástól független, és az egyes $\mathbf{A}_j$, $j=1,\dots,k$, halmazokba eső pontok száma $\lambda\mu(\mathbf{A}_j)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

c.) Legyen adva egy $(X,\mathcal{B})$ mérhető tér és rajta egy ν σ-véges mérték. Az elöző konstrukciót felhasználva konstruáljunk egy olyan $x_1,x_2,\dots$ véletlen pontrendszert az X téren, mely teljesíti a következő tulajdonságot: Bármely mérhető véges ν mértékű $\mathbf{A}$ halmazba eső pontok száma $\nu(\mathbf{A})$ mértékű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és diszjunkt (mérhető, véges mértékű) halmazokba eső pontok száma egymástól független.

Legyen adva egy $(X,\mathcal{A})$ mértéktér, és azon egy μ σ-véges mérték. Jelölje Z az összes olyan $(x_1,x_2,\dots)$, $x_j\in X$, $j=1,2,\dots$, pontrendszert, és legyen $\mathcal{F}$ az a legszűkebb σ-algebra, melyet az $z\colon z\in Z, z(\mathbf{A}_1)=k_1,\dots,z(\mathbf{A}_j)=k_j)$ halmazok generálnak, ahol $z(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$, jelöli a z pontrendszernek az $\mathbf{A}$ halmazba eső pontjainak a számát; $j=1,2,\dots$, továbbá k_l nem negatív egész szám, és $\mathbf{A}_l\in\mathcal{A}$, $\mu(\mathbf{A}_l)<\infty$, minden $1\le l\le j$-re. Egy $(\Omega,\mathcal{B},P)$ téren értelmezett mérhető $\xi:(\Omega,\mathcal{B})\to(Z,\mathcal{F})$ leképezést az $(X,\mathcal{A})$ téren értelmezett pontfolyamatnak nevezik. Azt mondjuk, hogy a ξ pontfolyamat Poisson pontfolyamat az $(X,\mathcal{A})$ téren μ számláló mértékkel, ha tetszőleges pozitív egész k számra és diszjunkt $\mathbf{A}_j\in\mathcal{A}$, $\mu(\mathbf{A}_j)<\infty$, $j=1,\dots,k$, halmazokra az $\mathbf{A}_j$, $j=1,\dots,k$, halmazokba eső pontok száma egymástól független valószínűségi változók, és az $\mathbf{A}$ halmazba eső pontok száma Poisson eloszlású valószínűségi változó

$\mu(\mathbf{A})$ paraméterrel. Az elöző feladatból következik, hogy tetszőleges $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mérhető tér esetén σ-additiv μ mértékkel létezik e téren értelmezett Poisson pontfolyamat μ számláló mértékkel.

Egy $X(t)$, $0 \le t \le T$ sztochasztikus folyamatot a $[0,T]$ intervallumon Poisson folyamatnak nevezünk λ paraméterrel, ha

(i) Az $X(t)$ folyamat független növekményű, azaz tetszőleges $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le T$ pontokra az $X(t_1)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ... , $X(t_k) - X(t_{k-1})$ valószínűségi változók függetlenek.

(ii) $X(t) - X(s)$ Poisson eloszlású $\lambda(t-s)$ paraméterrel.

(iii) Az $X(\cdot, \omega)$ trajektória szigorúan monoton, balról folytonos egész értékű függvény.

Ha $\xi(\omega)$ Poisson pontfolyamat a $[0,T]$ intervallumon a $\mu = \lambda \times$Lebesgue mérték számláló mértékkel, akkor $X(t.\omega) = \xi$ pontfolyamat pontjainak száma a $[0,t)$ intervallumban Poisson folyamat λ paraméterrel a $[0,T]$ intervallumon.

Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ, $\lambda > 0$ paraméterrel, ha $P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$ minden $x \ge 0$-ra.

3.) Lássuk be a következő azonosságot: $P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$, ha a ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású. Ezt az azonosságot az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságának nevezik. Lássuk be ennek az állításnak a következő általánosítását is: Legyen adva egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Legyen ezenkívül adva egy η $\mathcal{F}$ mérhető és egy ξ az $\mathcal{F}$ σ-algebrától független λ paraméterű, exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$P(\xi + \eta > x | \mathcal{F})(\omega) = e^{-\lambda(x - \eta(\omega))} \quad \text{ha } x \ge \eta(\omega)$$

(és $P(\xi + \eta > x | \mathcal{F})(\omega) = 1$ ha $x < \eta(\omega)$.)

Tegyük fel, hogy a ξ, η valószínűségi változók és $\mathcal{F}$ σ-algebra teljesítik az elöző állítás feltételeit. Tegyük fel továbbá, hogy $\eta(\omega) \le x$ egy valószínűséggel. Definiáljuk a $\mathbf{B} = \{\xi(\omega) + \eta(\omega) > x\}$ eseményt, és az $\bar{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F}, \sigma\{\mathbf{B}, \Omega \setminus \mathbf{B}\})$ σ-algebrát. (Azaz, $\bar{\mathcal{F}}$ a $(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A}_2 \cap (\Omega \setminus \mathbf{B}))$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{F}$, alakú halmazokból áll.) Válasszunk egy $z > x$ számot, és mutassuk meg (az elöző azonosság felhasználásával,) hogy

$$P(\xi + \eta > z | \bar{\mathcal{F}})(\omega)) = \begin{cases} e^{-\lambda(z-x)} & \text{ha } \omega \in \mathbf{B} \\ 0 & \text{ha } \omega \in \Omega \setminus \mathbf{B} \end{cases}$$

4.) Bizonyítsuk be, hogy ha egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye teljesíti az örökifjú tulajdonságot, azaz $P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$ minden $x \ge 0$ és $y \ge 0$ számra, akkor ξ exponenciális eloszlású.

5.) Legyenek ξ_1, ... ,$\xi_k$független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel, és $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$. Lássuk be, hogy S_k sűrűségfüggvénye $f(x) =$

$\frac{\lambda^k}{k!}x^{k-1}e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$ ha $x < 0$, és eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j x^j}{j!} e^{-\lambda x} \ ,$$

ha $x \ge 0$ és $F(x) = 0$ ha $x < 0$.

6.) Legyen $X(t)$, $0 \le t < \infty$, λ paraméterű Poisson folyamat, és definiáljuk a $\zeta_0 = 0$, $\zeta_k = \inf\{t\colon X(t) \ge k\}$, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Lássuk be, hogy a $\zeta_k - \zeta_{k-1}$ valószínűségi változók független exponenciális eloszlású valószínűségi változók λ paraméterrel, (azaz $P(\zeta_k - \zeta_{k-1} < x) < 1 - e^{-\lambda x}$ minden $x \ge 0$-ra.

7.) Legyenek η_j, $j = 1, 2\dots$, független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, és definiáljuk az $Y(t) = \sup\left\{k\colon \sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j \le k\right\}$, $0 \le t < \infty$ sztochasztikus folyamatot. Lássuk be, hogy $Y(t)$ λ paraméterű Poisson folyamat.

8.) Legyen $\xi_{k,j}$, $j = 1, \dots, n_k$ valószínűségi változók szériasorozata, melyek rögzített k-ra függetlenek. Tegyük fel ezen kívül, hogy

(i) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változókra $P(\xi_{k,j} = 1) = 1 - P(\xi_{k,j} = 0) = \lambda_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1\le j\le n_k} \lambda_{k,j} = 0$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \to \lambda > 0$

Ekkor az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy Poisson eloszlású valószínűségi változóhoz λ paraméterrel.

Lássuk be, hogy az állítás igaz marad, ha az (i) feltételt a következö gyengébb (i') feltétellel helyettesítjük.

(i') A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem-negatív egész értékeket vesznek fel, $P(\xi_{k,j} = 1) = \lambda_{k,j}$, $P(\xi_{k,j} \ge 2) = o(\lambda_{k,j})$, $1 \le j \le n_k$, és a $o(\cdot)$ egyenletes j-ben.

7.) Legyen ξ_k, $k = 1, \dots, n$, n darab független exponenciális eloszlású valószínűségi változó ugyanazzal a $\lambda > 0$ paraméterrel, és definiáljuk a $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1, \dots, n$ részletösszegeket. Lássuk be, hogy az $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ vektor feltételes eloszlása az $S_n = x$ feltétel mellett megegyezik egy $n-1$ elemű a $[0, x]$ intervallumban egyenletes eloszlású rendezett minta eloszlásával. (Azaz, legyen $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ $n-1$ független a $[0, x]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és az $\eta_1{*} \le \eta_2^* \cdots \le \eta_{n-1}^*$ $n-1$ elemű rendezett minta ezen η_k számok monoton sorendbe való átrendezése. A fenti feltételes eloszlás megegyezik ezen η_j^* valószínűségi változók együttes eloszlásával.) Lássuk be a következő (a fenti állítással ekvivalens) állítást is: Az $\left(\frac{S_1}{S_n}, \dots, \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor független az S_n valószínűségi változótól, és eloszlása megegyezik egy a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású rendezett minta eloszlásával.

Megoldások

1)

$$P(\xi+\eta=k)=\sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(j-k)!}e^{-\mu}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j\mu^{(k-j)}$$
$$=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}$$

minden $k\ge 0$-ra. Innen következik az állítás.

2.) a.)

$$P(\eta_1=l_1,\dots,\eta_k=l_k)=P(\xi=l_1+\cdots+l_k)\frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}$$
$$=\frac{\lambda^{(l_1+\cdots+l_k)}}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}e^{-\lambda}=\prod_{j=1}^{k}\frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!}e^{-\lambda p_j}$$

tetszőleges $l_1\ge 0,\ \dots,\ l_k\ge 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

b.) Legyen $\mathbf{A}_{k+1}=X\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k}\mathbf{A}_j$, $p_j=\mu_j(\mathbf{A}_j)$, $j=1,\dots,k+1$. Ekkor a feladat a.) része szerint az egyes $\mathbf{A}_j$ halmazokba eső pontok száma egymástól független $\lambda\mu(\mathbf{A}_j)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

c.) Tekintsük az X halmaznak egy particióját, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $X=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}X_j$, az X_j, $j=1,2,\dots$, halmazok diszjunktak, $\mu(X_j)=\lambda_j<\infty$. Konstruáljunk a b.) feladat felhasználásával mindegyik X_j halmazon egy olyan pontrendszert (véletlen számú pontot dobva le $\mu(X_j)$ paraméterű Poisson eloszlással egymástól függetlenül úgy, hogy egy pont egy $\mathbf{A}_j\subset X_j$ halmazba $\dfrac{\mu(\mathbf{A}_j)}{\mu(X_j)}$ valószínűséggel essék), hogy egy $\mathbf{A}_j\subset X_j$ halmazba eső pontok száma legyen $\mu(\mathbf{A}_j)$, paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és diszjunkt halmazokba egymástól független számú pont essék. Legyen a különböző X_j halmazokba eső pontok száma egymástól független. Mivel független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege Poisson eloszlású, és az összeg paramétere egyenlő az összeadandók paraméterének az összegével, ezért az itt leírt konstrukcióban tetszőleges $\mu(\mathbf{A})<\infty$ mértékű halmazba $\mu(\mathbf{A})$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó esik, és diszjunkt halmazokba eső pontok száma egymástól független. (Lássuk be, hogy végtelen sok független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson eloszlású, és az összeg paramétere megegyezik az összeadandók paraméterének az összegével, feltéve, hogy ez az összeg véges. Ennek bizonyításánál érdemes észrevenni, hogy ebben az esetben az összeg 1 valószínűséggel, ezért eloszlásban is konvergál.)

3.) $P(\xi > x+y|\xi > x) = \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda}$. Az általánosabb állítás bizonyításához használjuk fel a *feladatok* feladatsor 3. feladatának az eredményét. Definiáljuk az $f(u,v) = I(u+v > x)$ függvényt. Ekkor

$$P(\xi+\eta > x|\mathcal{F})(\omega) = E(f(\xi,\eta)|\mathcal{F})(\omega) = Ef(\xi,v)|_{v=\eta(\omega)} = P(\xi+v > x)|_{v=\eta(\omega)}$$
$$= \begin{cases} e^{-\lambda(x-\eta(\omega))} & \text{ha } x \ge \eta(\omega) \\ 1 & \text{ha } x < \eta(\omega) \end{cases}$$

Az utolsó állítás igazolásához azt kell belátni, hogy $P(\Omega\setminus\mathbf{B})\cap\mathbf{A}\cap\{\xi(\omega)+\eta(\omega) > z\}) = 0$ és $P(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}\cap\{\xi(\omega)+\eta(\omega) > z\}) = \int_{\mathbf{A}} e^{-\lambda(z-x)}\,dP = e^{-\lambda(z-x)}P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$ minden $\mathbf{A}\in\mathcal{F}$ halmazra. Az első azonosság nyílvánvaló, mivel $\Omega\setminus\mathbf{B})\cap\{\xi(\omega)+\eta(\omega) > z\}) = \emptyset$, és a második azonosság igaz, mivel

$$P(\mathbf{B}\cap\mathbf{A}\cap\{\xi(\omega)+\eta(\omega) > z\}) = P(\mathbf{A}\cap\{\xi(\omega)+\eta(\omega) > z\}) = \int_{\mathbf{A}} e^{-\lambda(z-\eta(\omega))}dP$$
$$= e^{-\lambda(z-x)}\int_{\mathbf{A}} e^{-\lambda(x-\eta(\omega))}dP = e^{-\lambda(z-x)}P(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\,.$$

8.) *Első megoldás*

Mutassuk meg, hogy az S_k valószínűségi változók karakterisztikus függvényei konvergálnak egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztkus függvényéhez.

$$Ee^{itS_k} = \prod_{j=1}^{n_k}(1-\lambda_{k,j}+\lambda_{k,j}e^{it}) = \prod_{j=1}^{n_k}\exp\left\{\lambda_{k,j}(e^{it}-1)+O(\lambda_{k,j}^2)\right\}$$
$$= \exp\left\{(e^{it}-1)\left(\sum_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}\right)+O\left(\sum_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}^2\right)\right\} \to \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}\,,$$

és egy η λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $Ee^{it\eta} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda+ikt} = \exp\{-\lambda+\lambda e^{it}\}$.

Az általánosabb állítás bizonyításához, amikor az (i') feltétel teljesül, vezessük be a $\xi'_{k,j}$ valószínűségi változókat a következő módon: $\xi'_{k,j} = \xi_{k,j}$ ha $\xi_{k,j} = 1$, és $\xi'_{k,j} = 0$, ha $\xi_{k,j} \ne 1$, $1 \le j \le n_k$, $k = 1,2,\dots$. Legyen $S'_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi'_{k,j}$. Ekkor a S'_k valószínűségi változókra alkalmazhatjuk a feladat már bizonyított részét. A funkcionális határeloszlástétel első feladata alapján elég belátni, hogy $S_k - S'_k \Rightarrow 0$, ha $k\to\infty$, ahol $\Rightarrow$ eloszlásban való (vagy sztochasztikus) konvergenciát jelöl. Viszont ez a feltétel teljesül, mivel $P(S_k \ne S'_k) \le \sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\xi_{k,j} \ge 2) \to 0$.

második megoldás (vázlat)

$$P(S_k=m)=\sum_{1\le l_1<\cdots<l_m\le n_k}\prod_{p=1}^m \lambda_{l_p}\prod_{r\in\{1,\dots,n_k\}\setminus\{l_1,\dots,l_m\}}(1-\lambda_r)$$
$$\sim\sum_{1\le l_1<\cdots<l_m\le n_k}\prod_{p=1}^m \lambda_{l_p}\exp\{-\lambda\}\sim\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

minden $m\ge 0$ egész számra. E becslések igazolásánál felhasználjuk, hogy $1-\lambda_r\sim e^{-\lambda_r}$, és mivel $\sum\limits_{r=1}^{n_k}\lambda_{k,r}\to\lambda$, és ez a reláció érvényben marad, ha véges sok tagot elhagyunk az összegből, ezért a belső produktum közelíthető $e^{-\lambda}$-val. Továbbá,

$$\sum_{1\le l_1<\cdots<l_m\le n_k}\prod_{p=1}^m \lambda_{l_p}\sim\frac{1}{m!}\left(\sum_{l=1}^{n_k}\lambda_{k,l}\right)^m\sim\frac{1}{m!}\lambda^m\ ,$$

mivel a $\left(\sum_{l=1}^{n_k}\lambda_{k,l}\right)^m$ kifejezés kifejtésében, a $\lambda_{k,r}\to 0$ feltétel miatt, elhanyagolható azon tagok hozadéka, melyben valamelyik $\lambda_{k,r}$ tag magasabb hatványon szerepel.

9.) Jelölje $f(x_1,\dots,x_n)$ az $(S_1,S_2,\dots,S_n)$ vektor és $g_n(x)$ az S_n valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ekkor az $(S_1,\dots,S_n)$ feltételes sűrűségfüggvénye az $S_n=x$ feltétel mellett explicit felírható, mint $h(x_1,\dots,x_{n-1}|x)=\dfrac{f(x_1,\dots,x_{n-1},x)}{g_n(x)}$. (lásd *feladatok* feladatsor 5. feladatát.) Az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvénye az $(x_1,\dots,x_n)$ pontban megegyezik a $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ vektor sűrűségfüggvényével az $(y_1,\dots,y_n)$ pontban, ahol $y_j=x_j-x_{j-1}$, $j=1,\dots,n$, $x_0=0$. (Miért?) Ezért $f(x_1,\dots,x_n)=\prod\limits_{k=1}^n e^{-\lambda y_k}=\lambda e^{-\lambda x_n}$, ha $0<x_1<x_2<\cdots<x_n$, és $f(x_1,\dots,x_n)=0$ különben. Egyszerű számolással (n szerinti indukcióval) kapjuk, hogy $g_n(x)=\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$. Ezért a $h(x_1,\dots,x_{n-1}|x)=\dfrac{(n-1)!}{x^(n-1)}$, ha $0<x_1<x_2<\cdots<x$, és $h(x_1,\dots,x_{n-1}|x)=0$ különben. Ez megegyezik az $n-1$ elemű a $[0,x]$ intervallumbeli egyenletes eloszlású függgetlen valószínűségi változókból készített rendezett minta sűrűségfüggvényével, mivel e változók együttes sűrűségfüggvénye a rendezés előtt $x^{-(n-1)}$, a rendezés után pedig ez $(n-1)!$-sal szorzódik, és az $0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x$ halmazra koncentrálódik. Innen következik az első állítás. A második állítás levezethető ebből az eredményből is a feltételes eloszlások tulajdonságait használva, de egyszerűbb levezetni a következő állításból: Ha az $(S_1,\dots,S_n)$ függvény sűrűségfüggvénye $f(x_1,\dots,x_n)$, akkor, mint az könnyen bizonyítható, a $\left(\dfrac{S_1}{S_n},\cdots,\dfrac{S_{n-1}}{S_n},S_n\right)$ vektor sűrűségfüggvénye $x_n^{n-1}f(x_1x_n,\dots,x_{n-1}x_n,x_n)$. Ez a mi esetünkben azt jelenti, hogy a vizsgált vektor és valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye $e^{-\lambda x_n}x_n^{n-1}$ az $\{(x_1,\dots,x_n)\colon$

$0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < 1,\ x_n > 0\}$, halmazon, és nulla ennek komplementerén. Ezért ez a sűrűségfüggvény $h(x_1, \dots, x_{n-1})g(x_n)$ alakban írható, ahol a

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}) = (n-1)!I(0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < 1)$$

függvény a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $n-1$ elemű rendezett minta sűrűségfüggvénye, és $g(x) = \lambda^n e^{-\lambda x} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ az S_n sűrűségfüggvénye. Innen következik az állítás.