Rácspontok száma konvex tartományban:

Feladat: Legyen $\mathbf{A}$ egy sima határú szigorúan konvex halmaz. Lássuk be, hogy a rácspontok száma az $R\mathbf{A}$ halmazban – $R^2 \cdot \mathbf{A}$ halmaz területe kisebb mint const.$R^{2/3}$.

Megjegyzés: Ez a feladat a klasszikus körprobléma egy természetes általánosítására adott nem-triviális becslés. A bizonyítás példát mutat arra, hogyan lehet használni a Poisson féle összegezési formulát nem-triviális becslések bizonyítására. Ezért érdemes feldolgozni ennek az állításnak a bizonyítását az alábbi feladatsorozat segítségével:

Jelölje $s(R,x)$ a rácspontok számát az $R\mathbf{A}+x$, $R>0$, $x\in[0,1]\times[0,1]$ tartományban. Bizonyítsuk be, hogy az $s(R,x)$ függvény Fourier sora a következő alakban írható fel: (Ez a formula a Poisson összegezési formula az adott esetben:)

$$s(R,x)\sim\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}e^{2\pi i(n,x)}\tilde{\chi}_{R\mathbf{A}}(n)=R^2\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}e^{2\pi i(n,x)}\tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(Rn)\ ,$$

ahol $\tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(u)$ és $\tilde{\chi}_{R\mathbf{A}}(u)$ jelöli az $\mathbf{A}$ illetve $R\mathbf{A}$ halmaz indikátorfüggvényének a Fourier transzformáltját az u pontban.

Ez a formula a kulcspontja a kívánt becslés bizonyításának. Két probléma merül fel ennek a formulának az alkalmazásánál:

1.) A fenti formula formális sorfejtés. A felírt Fourier sor még csak nem is konvergens.

2.) A formula alkalmazásához szükség van a $\tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(u)$ Fourier transzformált becslésére.

A kívánt Fourier transzformáltra pontos aszimptotikát lehet adni. Ezt egy későbbi alkalommal megtárgyalhatjuk. Most csak idézzük azt a következményét ennek a formulának, amire szükségünk van:

$$|\tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(u)|<\mathrm{const.}\,|u|^{-3/2}\ .$$

Az első pontban felvetett problémát alkalmas konvolució segítségével végrehajtott simítással oldhatjuk meg.

Legyen $f(x)$ olyan végtelen sokszor differenciálható függvény a számegyenesen, melyre $f(x)\ge 0$, $f(x)=0$, ha $|x|\ge 1$ és $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$. Lássuk be, hogy létezik ilyen függvény.

Definiáljuk az $F_\delta(x,y)=\frac{1}{\delta^2}f\left(\frac{x}{\delta}\right)f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ függvényt az előbbi $f(x)$ függvény segítségével, és tekintsük a

$$\bar{s}(R',x,)_\delta=s(R',\cdot)*F_\delta(\cdot)(x)=\int s(R',z)F_\delta(x-z)\,dz\ ,\quad x,\,z\in R^2$$

konvolúciót. Bizonyítsuk be, hogy $\bar{s}(R', x)$ Fourier transzformáltja teljesíti az

$$\tilde{\bar{s}}_\delta(R', x) = \tilde{s}(R', x)\tilde{F}_\delta(x)$$

azonosságot, és

$$|\tilde{F}_\delta(x)| \leq \frac{\text{const.}}{1 + \delta^k |x|^k} \ , \quad \forall x \in \mathbf{R}^2 \text{ és } \forall \, k > 0.$$

Lássuk be, hogy

$$\bar{s}(R', x) = R^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} e^{2\pi i(n,x)} \tilde{\chi}_{\mathbf{A}}(R'n)\tilde{F}_\delta(n) \ ,$$

azaz, a konvolució segítségével a Poisson összegezési formulában azonosságot írhatunk.

Lássuk be, hogy, ha az $\mathbf{A}$ halmaz tartalmazza a $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzetet, és $\delta > \frac{1}{R}$ akkor

$$s(R - \delta, \cdot) * F_\delta(\cdot)(x) \leq s(R, x) \leq s(R + \delta, \cdot) * F_\delta(\cdot)(x)$$

(Használjuk fel a konvolució geometriai jelentését.Vegyük észre, hogy az adott feltételek mellett $(R - \delta)\mathbf{A} + x \subset R\mathbf{A} \subset (R + \delta)\mathbf{A} + x$, ha $x \in [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta]$.)

Lássuk be, hogy tetszőleges $\delta < 1$-re

$$s(R, x) - R^2\mathbf{A} \text{ területe} \leq \text{const.} \left(\delta R + \sum_{n \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0} \frac{R^2}{(R|n|)^{3/2}} \frac{1}{1 + (|n|\delta)^k} \right) .$$

(Vegyük észre, hogy $\tilde{\bar{s}}(R - \delta, 0) = (R - \delta)^2\mathbf{A}$ területe, használjuk a Poisson összegezési formulát és a Fourier transzformáltra kapott becsléseket.)

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0} \frac{\sqrt{R}}{|n|^{3/2}(1 + (n\delta)^k)} < \text{const.}\, R^{1/2}\delta^{-1/2}.$$

Bizonyítsuk be a feladat állítását, ha a $\mathbf{A}$ halmaz tartalmazza a $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzetet.

Bizonyítsuk be a feladat állítását ez utóbbi feltétel nélkül is. (Válasszunk egy elég nagy, de R-től független nagyságú, K számot, és definiáljuk az $R_0 = \left[\frac{R}{K}\right]$ számot, az $\mathbf{A_0} = \frac{R}{R_0}\mathbf{A} + n$, halmazt alkalmas $n \in \mathbf{Z}^2$ eltolással, ahol $[\cdot]$ egész részt jelent. Lássuk be, hogy $R\mathbf{A}$ és $R_0\mathbf{A_0}$ ugyanannyi rácspontot tartalmaz. Ezen észrevétel segítségével redukáljuk az általános esetet a már bebizonyítottra.)