RAMSEY-TÉTEL ÉS ALKALMAZÁSAI

Kezdjük magával a Ramsey-tétellel, illetve annak legáltalánosabb (?) formájával.

1.) Jelölje K_n^r az n pont összes r elemű részhalmazából álló hipergráfot, és $p_1, \dots, p_k$ legyenek tetszőleges természetes számok. Ekkor létezik egy olyan (legkisebb) $n = R_k^r(p_1, \dots, p_k)$ szám, az úgynevezett Ramsey-szám, melyre igaz az, hogy bárhogy színezzük k színnel K_n^r éleit, legalább egy i színre található p_i pont, melynek összes r elemű részhalmaza i színű.

2.) Színezzük az $1, \dots, n$ természetes számokat k színnel, ahol $n \geq k!e$. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan azonos színű x, y, z természetes számok, melyekre $x + y = z$.

3.) Színezzük az n elemű alaphalmaz részhalmazait k színnel, ahol n elég nagy. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan azonos színű X, Y, Z részhalmazok, melyekre $X \cup Y = Z$.

4.) Bizonyítsuk be, hogy létezik tetszőlegesen magas dimenziójú intervallumrendezés. (Egy részbenrendezett halmaz intervallumrendezés, ha megkapható, mint a számegyenes bizonyos intervallumainak részbenrendezése, ahol $[a, b] > [c, d]$ akkor és csak akkor, ha $a > d$. Egy $(S, >)$ részbenrendezett halmaz dimenziója az a legkisebb k, amelyre $(S, >)$ megkapható, mint az S halmaz k különböző teljes rendezésének metszete.)

5.) Bizonyítsuk be, hogy a valós számok minden $k^2 + 1$ tagú sorozata tartalmaz egy $k + 1$ tagú monoton részsorozatot.

6.) Bizonyítsuk be, hogy minden az $\{1, \dots, 2^n\}$ halmazon értelmezett egész értékű f függvényhez, melyre $1 \leq f(i) \leq i$, $i = 1, \dots, 2^n$, létezik olyan $k + 1$ tagú $1 = a_1 < \dots < a_{n+1} \leq 2^n$ sorozat, melyre $f(a_1) \leq \dots \leq f(a_{n+1})$.