Mérhető számosságok

Soukup Lajos

Lebesgue mérték problémája:
Van-e olyan $\mu\colon P([0,1]) \to [0,\infty)$ leképezés, mely

i.) Nem azonosan nulla.
ii.) Eltolás invariáns,
iii.) σ-additív, azaz ha $\{X_i\colon i < \omega\}$ páronként diszjunkt halmazok, akkor $\mu(\bigcup_{i<\omega} X_i) = \sum_{i<\omega} \mu(X_i)$.

(A továbbiakban $P(S)$ jelöli egy S halmaz összes részhalmazát.)

Tétel: (Vitali) *Nincs ilyen leképezés.*

Definició *Ha S nem üres halmaz, akkor egy $\mu\colon P(S) \to [0,\infty)$ leképezést* mértéknek *nevezzük, ha*

i.) $\mu(S) = 1$,
ii.) $\mu(\{x\}) = 0$ *minden $x \in S$-re,*
iii.) μ σ-additív, azaz ha $\{X_i\colon i < \omega\} \subset P(S)$ páronként diszjunkt halmazok, akkor $\mu(\bigcup_{i<\omega} X_i) = \sum_{i<\omega} \mu(X_i)$.

További tárgyalandó kérdések:

1.) *Banach mérték problémája* Létezhet-e mérték valamely S halmazon?
2.) Létezhet-e mérték $[0,1]$-en?
3.) Létezhet-e olyan mérték $[0,1]$-en, amelyik a Lebesgue mérték kiterjesztése?

Ezeket a kérdéseket vizsgálva jutunk el a valósan mérhető és a mérhető számosságok fogalmához.

Definició: *Egy $\mu\colon P(S) \to [0,1]$ mértéket λ-additivnak hívunk, ha akárhogyan is adjuk meg S-nek λ-nál kevesebb páronként diszjunkt $\{X_\alpha\colon \alpha < \gamma\} \subset P(S)$ részhalmazát, akkor $\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$.* (Az elöző összeg úgy értendő, hogy megköveteljük: Legfeljebb megszámlálható sok $\mu(X_\alpha) \neq 0$ tag szerepel benne.)

Definició: *Egy κ számosságot* valósan mérhetőnek *nevezünk, ha van κ-additív $\mu\colon P(\kappa) \to [0,1]$ mérték. Egy κ számosságot* mérhetőnek *nevezünk, ha van κ-additív $\mu\colon P(\kappa) \to \{0,1\}$ mérték (azaz olyan mérték, mely csak 0 és 1 értéket vesz fel).*

Megmutatjuk, hogy egy mérhető számosság szükségszerűen "nagyon nagy" (pl. erősen elérhetetlen). Belátunk egy dichotomia tételt is:

Ha létezik μ mérték valamilyen S halmazon, akkor vagy van mérhető számosság (és ekkor például a valós számok minden nem megszámlálható ko-analitikus része tartalmaz perfekt részhalmazt), vagy a Lebesgue mérték kiterjeszthető σ-teljes módon $[0,1]$ minden részhalmazára.

(Egy ko-analitikus halmaz egy analitikus halmaz komplementere, és egy halmaz akkor analitikus, ha előáll, mint egy Borel mérhető halmaz folytonos képe.)