Egy másik hasonló konstrukció

Ez is John H. Conway “On numbers and games ” című könyve alapján készült. A fenti könyvön kívül ezzel a konstrukcióval foglalkozik D. Knuth egy szórakoztató könyve is.

Nem hiszem, hogy szemináriumot kellene szentelni rá, de szívesen beszélek erről bárkivel, akit érdekel.

Konstrukció

Legyen L és R számok két halmaza, úgy, hogy L egyetlen eleme sem $\geq R$ egyetlen eleménél sem. Ekkor ez a halmazpár egy szám, amit így jelölünk: $\{L|R\}$. Minden szám így lett konstruálva.

Jelölés

Az $x = \{L|R\}$ szám esetén x^L jelöli L tipikus elemét, x^R pedig R tipikus elemét. (Ez olyan, mint ahogy α' jelölte a tipikus α-nál kisebb elemet a rendszámos konstrukcióban.)

Ahelyett, hogy $x = \{L|R\}$-et írnánk, általában felsoroljuk L és R elemeit a kapcsos zárójelen belül, mint például az összeg, szorzat definiciójában, vagy például írhatjuk általában, hogy $x = \{x^L|x^R\}$. (Hasonló konvenciót használtunk a rendszámos konstrukciónál.)

Definiciók

Azt mondjuk, hogy $x \geq y$ (vagy ezzel ekvivalensen $y \leq x$) ha egyetlen x^R számra sem teljesül, hogy $x^R \leq y$, és egyetlen y^L számra sem teljesül $x \leq y^L$.

Azt mondjuk, hogy $x = y$, ha mind $x \geq y$, mind $x \leq y$ teljesül. Ilyenkor az x és y számokat azonosítjuk.

Összeadás: $x + y = \{x^L + y, x + y^L | x^R + y, x + y^R\}$.

Kivonás: $-x = \{-x^R| - x^L\}$.

Szorzás: $xy = \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R | x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}$.

Feladatok

0. A konstrukció értelmes. (A rendszámos konstrukcióval ellentétben itt ezt nehéz belátni. A konstrukció csak a $\geq$ és $=$ definiciójával ér véget, hiszen a $\geq$-t használjuk a konstrukciónál, míg az $=$ szerint azonosítjuk a számokat. Milyen értelemben van megalapozva a rekurzív definició? Az $=$ számok azonosításához igazolni kell, hogy $=$ ekvivalencia-reláció, és azt is, hogy ha a konstrukcióban a számokat velük egyenlőre cseréljük, akkor a konstruált szám is csak egyenlőre változik. Hasonlóan azt is, hogy a $\geq$ reláció sem érzékeny ilyen cserére.)

1. A számokat lineárisan rendezi $\geq$. (Azaz tranzitív, és bármely két szám összehasonlítható.)

2. Az összeadás, kivonás, szorzás értelmes. (A rekurzió megalapozottságán túl kell, hogyegyenlő számok összege, különbsége és szorzata is egyenlő. Ez olyan, mint a 3. és 9. pont a másik konstrukciónál.)

3. A számok rendezett testet alkotnak. (A reciprok létezésén kívül minden egysoros bizonyítással kijön. Reciprok létezése nehéz.)

4. Ha a konstrukcióban csak véges (esetleg csak egy elemű) L és R halmazokat engednénk meg, csak a számok egy részét lehetne megkonstruálni. Melyeket? Mi az “értéke” ennek a számnak: $\{\{\{|\}|\}|\{\{\{|\}|\}|\}\}$?

5. Találjuk meg a valós számokat az összes szám között.

6. Az olyan számokat, melyekre R üres (azaz $x = \{x^L|\}$) jól rendezi a $<$ ($x < y$, ha $x \leq y$, de nem $x = y$). Így ezek azonosíthatóak a rendszámokkal. Ezek az összeadásra és szorzásra zártak (egyszerű), de rajtuk az összeadás nem a rendszámösszeadás lesz (mert az nem kommutatív), (és persze semmi köze nem lesz a rendszámos konstrukcióval definiált összeadáshoz. Hogy írható le ez az összeadás? És a szorzás?