A szeptember 23. szeminárium rövid összefoglalója.

Adva egy $[a_1, a_s, \dots, a_n]$ $[a_1, a_s, \dots,] = \lim_{n\to\infty} [a_1, a_s, \dots, a_n]$ véges vagy végtelen lánctört ennek közelítő $[a_1, a_s, \dots, a_k]$ közelítő lánctörtjei kiszámíthatóak a

$$[a_1, a_s, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k},$$

$$\begin{aligned} p_j &= a_j p_{j-1} + p_{j-2} \\ q_j &= a_j q_{j-1} + q_{j-2} \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \dots$$

és

$$p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0, \quad p_0 = 0,\ q_0 = 1$$

rekurzív formula segítségével. Továbbá, érvényesek a

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= (-1)^{n+1} \\ p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} &= (-1)^n a_n \end{aligned}$$

formulák. Beláttuk, hogy minden $0 \le \alpha < 1$ szám lényegében egyértelműen felírható lánctört alakban. Továbbá figyelve az előző formulák geometriai jelentésére láttuk, hogy

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} = \left| \frac{p_{n+1} + p_n}{q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Ez azt jelenti, hogy egy számnak ezen szám lánctört közelítései viszonylag kis nevezőjű törtekkel megadott jó approximációját biztosítják. A továbbiakban arra leszünk kiváncsiak, hogy melyek egy szám legjobb viszonylag kis nevezőjű approximációi, és milyen jó approximációt tudunk adni egy konkrét számra. Bevezettük a következő definiciót:

Egy α számnak a $\frac{p}{q}$ tört elsőrendben optimális approximációja, ha

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \min_{1 \le s < q} \left| \frac{r}{s} - \alpha \right|,$$

másodrendben optimális approximációja, ha

$$|p - q\alpha| < \min_{1 \le s < q} |r - s\alpha|.$$

Látni fogjuk, hogy az első és másodrendben optimális approximációk szoros kapcsolatban vannak a lánctörtekkel.

Végül felírtunk egy formulát, mely hasznos lesz "tipikus" pontok kis nevezőjű törtekkel való approximálhatóságának vizsgálatával.

Adva egy y valós szám, akkor jelölje $[y]$ az y szám egész részét, azaz a a legnagyobb y-nál kisebb egész számot, $\{y\} = y - [y]$ pedig az y szám tört részét. Adva egy $x = [a_1, a_2, \dots]$ lánctört alakban megadott szám $0 \le x < 1$, legyen $Tx = [a_2, a_3, \dots]$ és $T^k x = [a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$, $k = 1, 2, \dots$. Ekkor $Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$, $T^k x$ pedig a T transzformáció k-szoros iterációja az x pontra alkalmazva. Végül $a_k = \left[\frac{1}{T^{k-1} x} \right]$, $k = 1, 2, \dots$.