Feladatok

1.) Legyen adva a síkon egy félegyenes, melynek a végén egy akadály van. Szerkesszük meg a félegyenes meghosszabbítását csak vonalzó felhasználásával.

2.) Egy ellipszis alakú asztalon mozogjon egy pont a fizika törvényei szerint. Azaz a pont az asztal belsejében egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és ha az asztal határához ér, akkor az ellipszis érintőjével bezárt beesési és visszaverődési szögek megegyeznek. Lássuk be, hogy van egy olyan az asztal határát képező ellipszissel koncentrikus ellipszis vagy hiperbóla, melyet a pont pályáját alkotó egyenesek érintenek. (Két kúpszeletet koncentrikusnak nevezünk, ha a fókuszpontjaik megegyeznek.)

Segítség: Használjuk fel azt, hogy ha a pont az ellipszis egyik fókuszpontból indul ki, akkor a tükrözés után átmegy a másik fókuszponton.

3.) Definiáljuk a $y = \mathbf{T}x = 1 - 2x^2$ transzformációt a $[-1,1]$ intervallumon, és tekintsünk valamilyen $x_0 \in [0,1]$ pontból kiinduló és az $x_{n+1} = \mathbf{T}x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, rekurzió segítségével definiált sorozatot. Lássuk be, hogy

a.) Az $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sűrűségfüggvénnyel meghatározott mérték a $\mathbf{T}$ transzformáció invariáns mértéke, azaz tetszőleges mérhető $\mathbf{A} \subset [0,1]$ halmazra, $\mu(\mathbf{A}) = \mu\left(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A})\right)$, ahol $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}) = \{x\colon \mathbf{T}x \in \mathbf{A}\}$, és $\mu(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{A}} f(x)\,dx$. (Neumann János és Ulam tétele.)

Segítség: Írjuk fel a transzformációt egy $(u,\, v)$, $x = \cos u$, $y = \cos v$, $0 \le u, v \le \pi$ koordinátarendszerben. Lássuk be, hogy ekkor a $v = G(u)$,

$$G(u) = \begin{cases} \pi - 2u & \text{ha } 0 \le u \le \frac{\pi}{2} \\ 2u - \pi & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le u \le \pi \end{cases}.$$

transzformációt kell tekinteni.

b.) Lássuk be, hogy a $[-1,1]$ intervallum fenti $\mathbf{T}$ transzformációja a definiált μ mértékkel ergodikus, azaz ha $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, akkor $\mu(\mathbf{A}) = 0$ vagy $\mu(\mathbf{A}) = 1$.

Segítség: Ha $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, akkor $\mathbf{T}^{-n}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ minden n-re. Mit jelent ez az új (u, v) koordinátarendszerben?

c.) Mit mondhatunk egy "tipikus" x_0 pontból kiinduló pont x_n, $n = 1, 2, \ldots$, pályájáról?

Az utolsó két feladat kapcsán beszélni fogunk arról a kérdésről, hogy egy tipikus fizikai rendszernek milyen szabályos vagy szabálytalan pályája lehet, és hogy ennek mi van a hátterében. Erre a kérdéskörre a későbbiekben is szeretnénk visszatérni.