

Feladatok

- 1.) Két személy a következő játékot játssza: Az első személy minden időpontban 100 lépést tehet a két-dimenziós rácson az origóból indulva, és csak fölfelé vagy jobbra léphet. Ezután a második játékos kijelöl egy rácspontot, melyre az első játékos nem léphet. A két játékos látja egymás lépéseit. Az első játékos szeretne az origótól tetszőleges messze eljutni, a második játékos pedig ezt meg akarja akadályozni. Ki nyeri meg ezt a játékot jó stratégia esetén?
- 1b.) Mi a helyzet, ha az első játékos nemcsak felfelé, de lefelé is léphet? Ha az első játékos a három-dimenziós rácson bolyonghat, de minden irányban csak előre léphet? Ha magasabb dimenziós rácson bolyonghat, minden irányban csak előre lépve? Ha a két-dimenziós rácson bármely irányban léphet? (Úgy tudjuk, hogy az utolsó két kérdés megoldatlan. Sőt, mi a háromdimenziós feladatot sem tudjuk megoldani. Ezt a feladatot P.R. Mauldin professzortól hallottuk.)
- 2.) Legyenek adva a síkban körök, melyek közül semmelyik kettő nem metszi egymást, és tekintük az összes olyan pontot, ahol e körök közül legalább kettő érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az e pontokból álló halmaz számossága nem lehet nagyobb mint megszámlálható.
(Ezt a feladatot Keleti Tamás javaslatára tűzték ki az idei nemzetközi, egyetemisták közötti versenyen Bulgáriában.)
- 2b.) (Egyszerűbb, de hasonló feladat.) Nevezzük Y -nak a síkon egy pontból más-más irányba induló három szakasz únióját. Igazoljuk, hogy diszjunkt Y -ok tetszőleges rendszere megszámlálható.
- 3.) Lássuk be, hogy egy végesen generált idempotens félcsoporthat véges.
Definíciók: A félcsoporthat olyan halmaz, melyen van egy kétváltozós, asszociatív művelet. A félcsoporthat idempotens, ha annak minden a elemére $a^2 = a$.
- 3b.) Hány eleme lehet maximum egy öt elemmel generált idempotens félcsoporthatnak? Hogy néz ki egy szabad idempotens félcsoporthat?
- 4.) Adjunk meg olyan végtelen hosszú 0–1 sorozatot, amelyikben egyetlen (nem üres) részsorozat sem ismétlődik háromszor közvetlenül egymás után. (Így például egy a 00101011 jelekkel kezdődő sorozat nem jó, mert ebben a 01 háromszor ismétlődik.)
- 4b.) Van-e végtelen sorozat három betűből, amelyikben egyetlen (nem üres) részsorozat sem ismétlődik kétszer egymás után?