

## Vizsgafeladatok és kérdések

- 1.) Mi a többváltozós normális eloszlás definíciója? Hogy szól a többváltozós centrális határeloszlástétel független, egyforma eloszlású véletlen vektorok összegére? Milyen eredményeket kell ismernünk annak megmutatásához, hogy ezen tétel állítása értelmes?
- 2.) Hogyan definiáljuk a martingál és szubmartingál fogalmát? Legyen adva növekvő  $\sigma$ -algebrák egy  $\mathcal{F}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozata. Mikor mondjuk, hogy egy  $\tau$  valószínűségi változó megállási szabály erre a rendszerre nézve?
- 3.) Mit jelent az, hogy  $\sigma$ -algebrák egy sorozata filtráció? Mikor mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat adaptált egy filtrációhoz? Vázolja az Itô integrál definíciójának a gondolatmenetét. Milyen feltételek mellett létezik az

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Itô folyamat, azaz milyen feltételeket kell teljesítenie  $X_0$ -nak  $K_s$ -nek és  $H_s$ -nek ahhoz, hogy a fent definiált kifejezés értelmes legyen? ( $W_t$  egy Wiener folyamatot jelöl a szokásos normalizációval, azaz  $EW_s = 0$ ,  $EW_s W_t = \min(s, t)$ .)

- 4.) Milyen eredményeket ismer martingálok és szubmartingálok maximumának a becsléséről?
- 5.) Mi a diszkrét idejű bináris piac definíciója? Milyen eredményeket ismer velük kapcsolatban?
- 6.) Mi a kötvény, részvény, stratégia, önfinszírozó stratégia fogalma a pénzügyi matematikában? (Mind a diszkrét mind a folytonos idejű modellek érdekesek.)
- 7.) Mikor mondjuk, hogy egy piac arbitrázatmentes? Mi az ekvivalens martingál mérték definíciója? Milyen kapcsolat van az arbitrázatmentes piac és az ekvivalens martingál mérték létezése között?
- 8.) Mutassa meg az Itô formula segítségével, hogy ha  $W(t)$  standard Wiener folyamat, akkor

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2}(W^2(t) - t),$$

$$\int_0^t W^2(s) dW(s) = \frac{1}{3}W^3(t) - \int_0^t W(s) ds,$$

és

$$\int_0^t W^3(s) dW(s) = \frac{1}{4}W^4(t) - \frac{3}{2} \int_0^t W^2(s) ds.$$

- 9.) Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számolja ki az  $E\left(\frac{\xi^4+1}{\eta^2+1} \mid \eta\right)$  feltételes várható értéket.